CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 7

Fonction logarithme népérien	***Pour le 30 janvier 2019***

Exercice 1

1) a) • $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -x = 0$; donc **lim** $\boldsymbol{f(x)}$ Z Jã (sous lim : $\boldsymbol{x}$ ì 0) (par somme de limites).

• $f(x) = x\left(e\dfrac{\ln x}{x} - 1\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -1$ (par somme de limites).

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc **lim** $\boldsymbol{f(x)}$ Z Jã (sous lim : $\boldsymbol{x}$ ì Hã) (par produit de limites).

• On a $f = eln - u$ avec $u(x) = -x$.

Comme u et la fonction ln sont dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, alors f est dérivable en tant que différence de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$.

D'où $f' = eln' - u'$, avec $u'(x) = -1$.

Donc $f'(x) = \dfrac{e}{x} - 1 = \dfrac{e-x}{x}$, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$.

Comme x pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $e - x$.

Or $e - x = 0$ équivaut à $x = e$; $e - x > 0$ équivaut à $x < e$; $e - x < 0$ équivaut à $x > e$.

On en déduit que :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2) D'après le tableau de variations, pour tout réel x différent de e, $f(x) < 0$.

Par suite, f(®)<0. Or f(®)$= e\ln$(®)$-$® $=\ln$(®^{e})$-$® .

D'où ln(®^{e})$-$® , c'est-à-dire ln(®^{e})$<$® .

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur **R**, alors $e^{\ln(\text{®}^e)} < e^{\text{®}}$.

Or $e^{\ln(\text{®}^e)} = \text{®}^e$; par conséquent, **®^{e} Y $e^{\text{®}}$** .

Exercice 2

1) $e^x - x^n = 0$ équivaut à $e^x = x^n$, c'est-à-dire à $\ln(e^x) = \ln(x^n)$, ou encore à $x = \ln(x^n)$

Or x est un réel strictement positif, alors $\ln(x^n) = n\ln x$.

D'où $e^x - x^n = 0$ équivaut à $x = n\ln x$, c'est-à-dire à $\ln x - \dfrac{x}{n} = 0$ car n un entier naturel non nul.

Donc **l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : ln$\boldsymbol{x}$ J $\boldsymbol{\dfrac{x}{n}}$ Z 0** .

2) L'équation (E1) admet deux solutions si et seulement si l'équation (E2) admet deux solutions.

Afin de résoudre l'équation (E_2), introduisons la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$f(x) = \ln x - \dfrac{x}{n}$.

● $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{n} = 0$; donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$ (par somme de limites).

$f(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{n}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{n}$ (par somme de limites).

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ (par produit de limites).

● On a $f = ln - u$ avec $u(x) = -\dfrac{x}{n}$.

Comme u et la fonction ln sont dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, alors f est dérivable en tant que différence de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$.

D'où $f' = ln' - u'$, avec $u'(x) = -\dfrac{1}{n}$.

Donc $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-x}{nx}$, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$.

Comme nx pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $n-x$.

Or $n - x = 0$ équivaut à $x = n$; $n - x > 0$ équivaut à $x < n$; $n - x < 0$ équivaut à $x > n$.

On en déduit que :

x	0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(n) - 1$	$\searrow$	$-\infty$

● D'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions si, et seulement si le maximum de la fonction f, c'est-à-dire $\ln(n) - 1$, est strictement positif.

Or $\ln(n) - 1 > 0$ équivaut à $\ln(n) > 1$, c'est-à-dire à $n > e^1$.

Or $e^1 = e \approx 2{,}7$ et n est un entier naturel non nul ; par conséquent, **l'équation (E1) admet deux solutions si et seulement si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3**.