LIMITES ET CONTINUITÉ

Cours	**Terminale S**

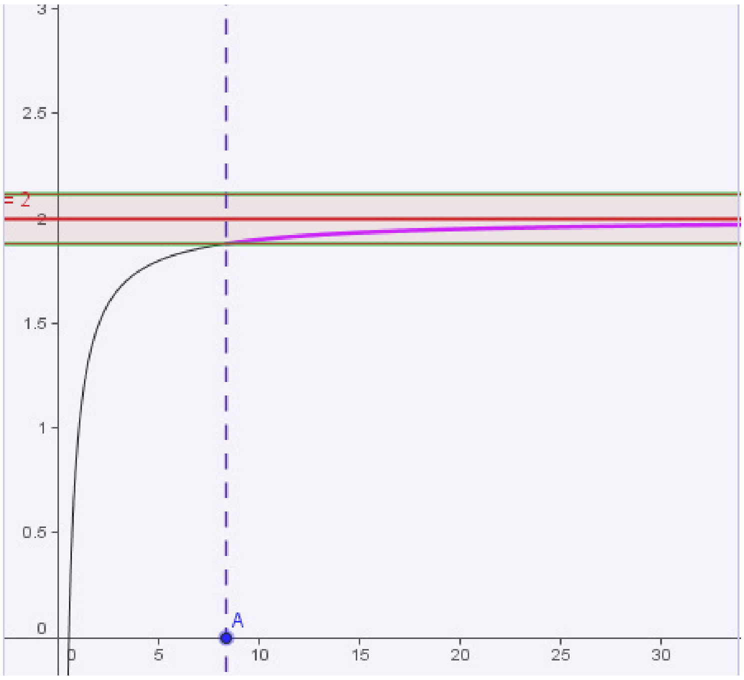
1. Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite finie en l'infini

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A\ ;\ +\infty[$.
On dit que la fonction f admet pour limite ℓ en $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.
On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.



Soit α un réel strictement positif quelconque. Existe-t-il un moment à partir duquel toutes les valeurs prises par la fonction restent dans l'intervalle $]2-\alpha\ ;\ 2+\alpha[$?

On cherche donc x tel que $2 - \alpha < 2 - \dfrac{1}{x} < 2 + \alpha$ (1).

$$2 - \alpha - 2 < 2 - \frac{1}{x} - 2 < 2 + \alpha - 2$$

$$-\alpha < -\frac{1}{x} < \alpha$$

$$\alpha > \frac{1}{x} > -\alpha \text{ ou } -\alpha < \frac{1}{x} < \alpha$$

$$x > \frac{1}{\alpha} \text{ car } x > 0$$

Donc, quel que soit l'intervalle ouvert centré en ℓ, toutes les images par f des réels strictement supérieurs à $\frac{1}{\alpha}$ sont dans cet intervalle.
On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$

__Définition 2__ : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\ ;\ A[$.
On dit que la fonction f admet pour limite ℓ en $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $-x$ est suffisamment grand .
On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.
On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Remarques : • La limite de f est unique.
• Pour déterminer la position de la courbe d'une fonction f par rapport à son asymptote d'équation $y = \ell$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - \ell$.
• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ équivaut à $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x) - \ell| = 0$.

__Théorème 1__ : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour tout entier n de $\mathbf{N}^*$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour tout entier n de $\mathbf{N}^*$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

2) *Limite infinie en l'infini*

__Définition 3__ : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A\ ;\ +\infty[$.
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert $]A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.
On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2$.
Essayons de « prouver » que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Soit un réel B strictement positif quelconque (qui sera notre seuil). Existe-t-il un moment à partir duquel toutes les valeurs prises par la fonction restent dans l'intervalle $]B\ ;\ +\infty[$?
On cherche donc x tel que $x^2 > B$ (1).

Comme x est strictement positif, alors $x > \sqrt{B}$

Donc, quel que soit l'intervalle ouvert centré $]B\ ;\ +\infty[$ $(B > 0)$, toutes les images par f des réels strictement supérieurs à $\sqrt{B}$ sont dans cet intervalle.
On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque : La limite en $+\infty$ d'une fonction f est $-\infty$ lorsque la fonction g définie sur l'intervalle $]B\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -f(x)$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

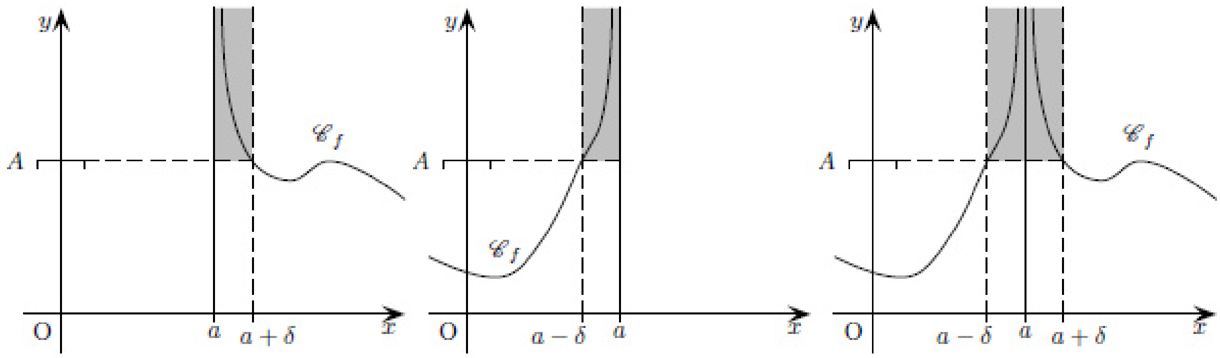
Définition 4 : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A\ ;\ +\infty[$.
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert $]-\infty\ ;\ A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.
On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque : On peut faire des définitions équivalentes pour $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et pour $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème2 : Soit n un entier naturel non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$.
Si $a > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (ax+b) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (ax+b) = -\infty$
Si $a < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (ax+b) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (ax+b) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

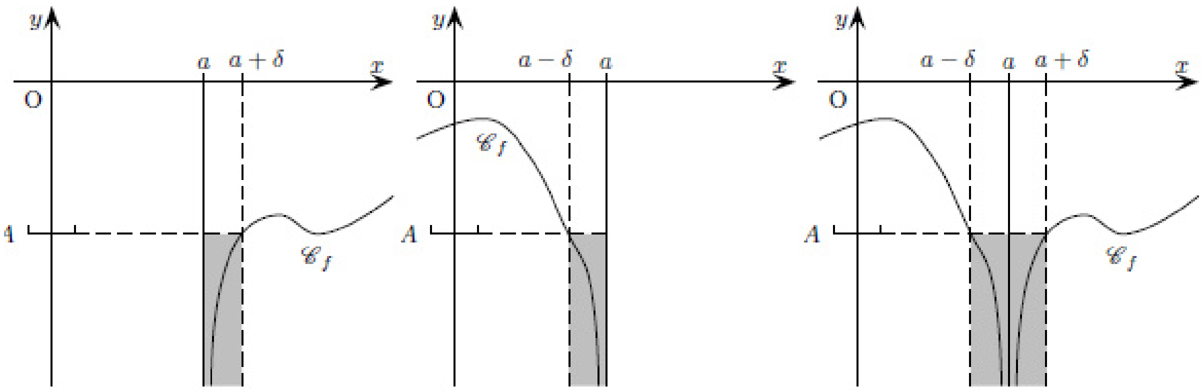
3. Limite d'une fonction en un réel *a*

Définition 4 : Soit a un réel et f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle de la forme $]a\ ;\ a+\delta[$ ou $]a-\delta\ ;\ a[$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ en a à gauche de a (respectivement à droite de a) lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A\ ;\ +\infty[$ avec A réel, contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a à gauche (respectivement à droite) de a.
On note : $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$).
On dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de $\mathscr{C}_f$ à gauche (respectivement à droite) de a.



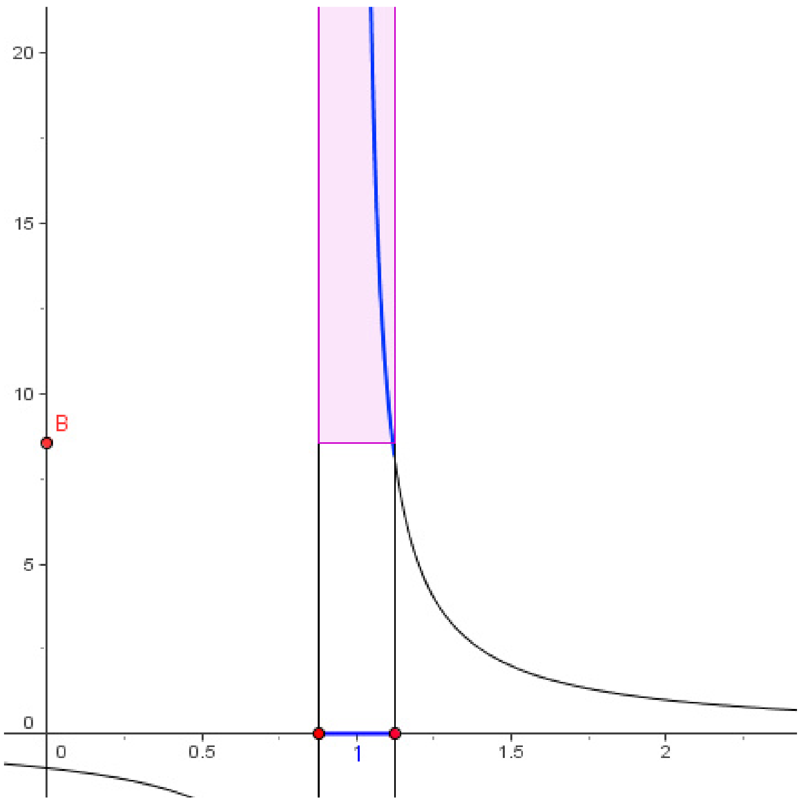
$\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

C. Lainé



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]1\,;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.



Pour chaque valeur de A choisie, on détermine un intervalle I de façon à ce que la courbe bleue se trouve dans la partie rose.

Théorème3 : Soit n un entier naturel non nul :

- si n est pair, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$;

- si n est impair, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

4. Opérations sur les limites

Soit f et g admettant chacune une limite, finie ou non, quand x tend vers a.
Dans ces énoncés, a peut être remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$, mais ℓ et ℓ' sont des réels.
Lorsqu'il n'y a pas de théorème général permettant de conclure et qu'il faut utiliser d'autres démarches, on dit qu'on a une forme indéterminée, souvent notée **F.I.**
Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

1) Limite de la somme $f+g$ des fonctions f et g

Si	$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Exemples :

• *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$.

On a $f=g+h$ avec $g(x)=\sqrt{x}$ et $h(x)=-\dfrac{2}{x^2}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)=+\infty$ (par somme de limites).

• *Déterminer* $\lim\limits_{x\to-\infty} x(1-x)$.

On a $f=g\times h$ avec $g(x)=x$ et $h(x)=1-x$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-x^2\right)=+\infty$ (par produit de limites).

2) Limite du produit $f\times g$ des fonctions f et g

Il faut penser à appliquer la règle de signe d'un produit, qui s'applique aux limites « infinies ».

Si	$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$
	$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Si	$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	0
	$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right) =$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Exemples :

• *Déterminer* $\lim\limits_{x\to 0}(x+2)\sqrt{x}$.

On a $f=g\times h$ avec $g(x)=x+2$ et $h(x)=\sqrt{x}$.
Or $\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=2$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$, donc $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0}(x+2)\sqrt{x}=0}$ (par produit de limites).

• *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-x)$.

On a $f=g\times h$ avec $g(x)=x$ et $h(x)=1-x$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x=-\infty$ donc $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-x)=-\infty}$ (par produit de limites)

3) Limite du quotient $\frac{f}{g}$ des fonctions *f* et *g*

• **Cas où la limite de *g* n'est pas nulle** :

Si	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors	$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

• **Cas où la limite de *g* est nulle** :

Si	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
alors	$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

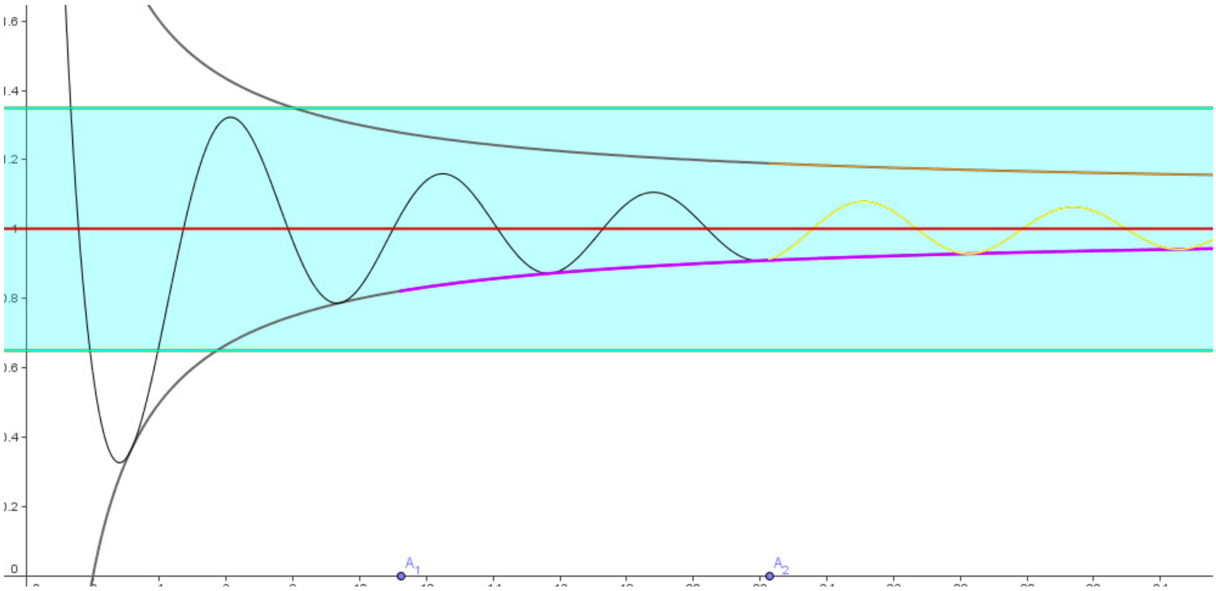
Remarque : « 0 en restant négative ou positive » signifie que *g* garde un signe constant au voisinage de *a*, en $+\infty$ ou en $-\infty$ suivant les cas.

Exemple : *Déterminer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x-2}{\sqrt{x}}$.

On a : $f=\frac{g}{h}$ avec $g(x)=x-2$ et $h(x)=\sqrt{x}$.
Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-2)=-2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}=0$ (en restant positive), donc $\mathbf{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x}}\right)}=-\infty$.

4. Théorèmes de comparaison

1) Théorème des gendarmes



Une fonction f est « coincée » entre deux fonctions g et h qui tendent vers 1 en $+\infty$, alors f elle-même va tendre vers 1 en $+\infty$.

<u>Théorème des gendarmes en l'infini</u> (admis) : Soient f, g et h des fonctions, et ℓ et A deux réels.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ et si, pour tout réel x supérieur ou égal à A, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,

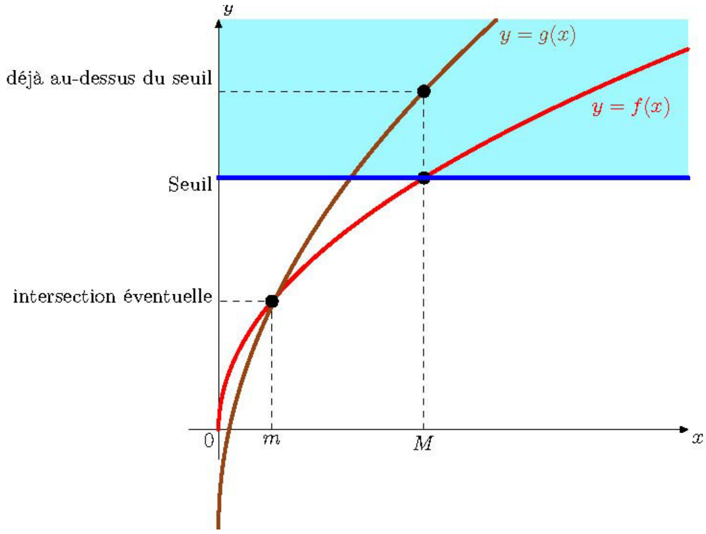
alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

<u>Exemple</u> : Soit $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Pour tout réel x strictement positif, $-1 \leq \cos x \leq 1$; donc, $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$; d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) *Autres théorèmes de comparaison*



Théorème 5 : Si pour tout $x \geq m$, $g(x) \geq f(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Démonstration : Soit un réel B strictement positif quelconque.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe un réel M tel que pour tout x supérieur ou égal à M, $f(x) \geq B$.
De plus, pour tout réel x supérieur ou égal à M, $g(x) \geq f(x)$.
Soit A le plus grand des réels M et m, alors, pour tout $x \geq A$, on a en même temps $g(x) \geq f(x) \geq B$; ce qui se traduit par $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Exemple : Soit $f(x) = x - \cos x$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
Pour tout réel x réel, $-1 \leq \cos x \leq 1$; donc, $-1 \leq -\cos x \leq 1$, et par suite, $x - 1 \leq -\cos x \leq x + 1$.
Comme $f(x) \geq x - 1$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Il existe un théorème qui ressemble au précédent mais avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème 6 : Si pour tout $x \geq m$, $g(x) \leq f(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

Remarque : On a des théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a.

5. Limite d'une fonction composée

Définition 5 : Soit f et g deux fonctions. On appelle fonction composée de f par g (ou composée de f suivie de g), et on note $g \circ f$ (lire « g rond f ») , la fonction définie par : $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

L'écriture $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ n'a de sens que si $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$.
Ainsi dire que $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$ revient à dire que $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$.

Exemple : On considère les fonctions $f : x \mapsto x - 1$ définie sur **R** et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbf{R}^*$.

$g \circ f$ est définie si, et seulement si $x \in \mathscr{D}_f$ et $f(x) \in \mathscr{D}_g$, si, et seulement si, $x - 1 \neq 0$.

Ainsi $\mathscr{D}_{g \circ f}$ = **R** \ {1} et, pour tout $x \in \mathscr{D}_{g \circ f}$: $(g \circ f)(x) = g(x-1) = \dfrac{1}{x-1}$.

$f \circ g$ est définie si, et seulement si, $x \in \mathscr{D}_g$ et $g(x) \in \mathscr{D}_f$, <u>ssi</u> $x \neq 0$.

Ainsi $\mathscr{D}_{f \circ g}$ = **R*** ,et, pour tout $x \in \mathscr{D}_{f \circ g}$: $(f \circ g)(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} - 1$.

Remarque : On notera que les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont le plus généralement différentes.

Théorème 7 (admis) : Soit f et g deux fonctions, et soient a, b et c qui désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{X \to b} g(X) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

On a $f = g \circ h$ avec $h(x) = 3x^2 - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6. Continuité

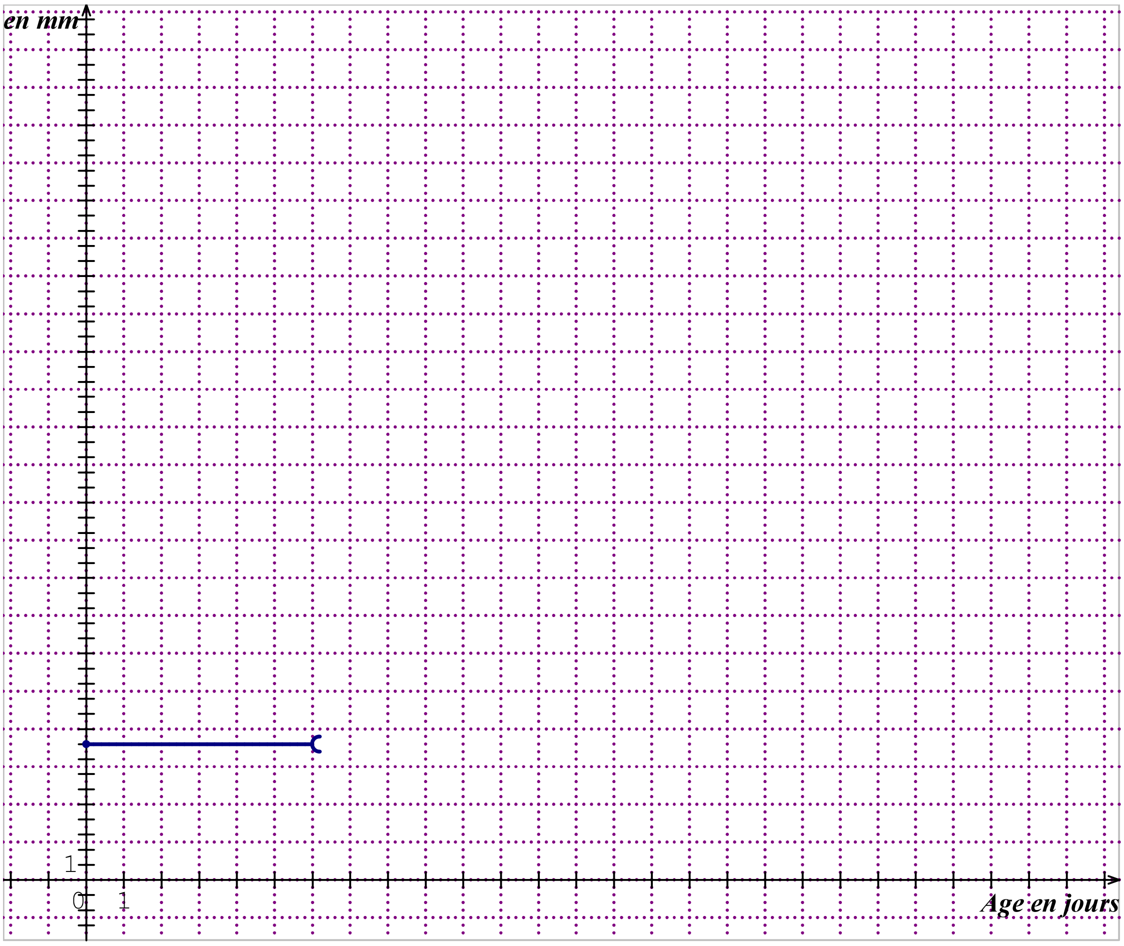
1) *Vers l'idée de continuité*

Le criquet est enfermé dans une cuticule inextensible. La taille du criquet, s'accroît brusquement par paliers chaque fois qu'il se débarrasse de son enveloppe rigide, c'est-à-dire chaque fois qu'il mue. Les biologistes disent que le criquet a une croissance « discontinue ». Le tableau ci-dessous donne la taille du criquet en fonction de son âge.

Age du criquet	Taille du criquet
De 0 à 6 jours exclu	9 mm
De 6 à 8 jours exclu	12 mm
De 8 à 10 jours exclu	16 mm
De 10 à 13 jours exclu	21 mm
De 13 à 16 jours exclu	27 mm
A partir du 16$^{\text{ème}}$ jour	40 mm

a) Compléter le graphique suivant qui représente la fonction suivante :

f : (âge en jours) $\mapsto$ (taille en mm)

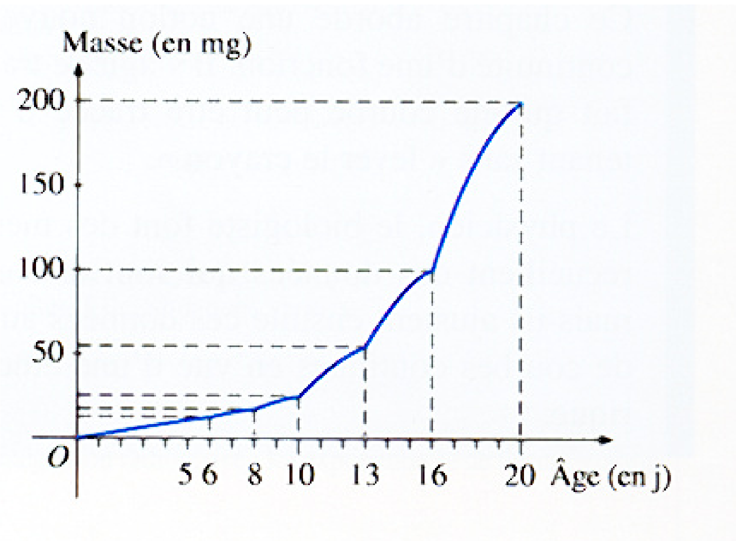


❶ La courbe précédente $\mathscr{C}_f$ peut-elle être tracée sans lever le crayon autour du point d'abscisse 13 ?

❷ La fonction f admet-elle une limite en 13 ?

b) Le graphique ci-dessous représente la fonction suivante :

g : (âge en jours) $\mapsto$ (masse en mg) .



❶ Cette courbe peut-elle être tracée sans lever le crayon ?

❷ La fonction g admet-elle une limite en 13 ?

Conclusion : Si une fonction définie en un réel a n'admet pas de limite en a, alors il est impossible de tracer sa courbe sans lever le crayon autour du point d'abscisse a.
Lorsque la fonction f admet une limite en a, qui est égale à $f(a)$, on dit que f est continue en a.

2) *Définition*

Définition 6 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
• Soit a un réel appartenant à I. On dit que f est continue en a, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
• Dire que f est continue sur I signifie que f est continue en tout point a de I.

Exemple : La fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction continue en tout point a de **R**, elle est donc continue sur **R**.
On peut le justifier en démontrant que $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, c'est-à-dire en démontrant que x^2 est aussi proche que l'on veut de a^2 lorsqu'on prend x suffisamment proche de a.
La parabole représentant la fonction $x \mapsto x^2$ peut être tracée sans lever le crayon de la feuille.

Remarques :
• Lorsque a est la borne d'un intervalle fermé, on étudie la limite à gauche ou la limite à droite en a selon les cas.
• $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ équivaut à $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

3) *Dérivabilité et continuité*

Définition 8 (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a

Remarques :
• Cette propriété nous donne un moyen pour démontrer qu'une fonction est continue sur un intervalle I ; il suffit en effet de démontrer que cette fonction est dérivable sur I.
• La réciproque de cette propriété est fausse.
Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

4) *Tableau de variations et continuité*

Dans un tableau de variations, on ne coupe pas les flèches sur les intervalles où la fonction *f* est continue et monotone.

Exemple : Voici le tableau de variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

Ce tableau représente une fonction continue sur $]-\infty\,;\,2[$ et sur $]2\,;\,+\infty[$.

5) *Fonctions de référence*

Propriété 2 (admise) :
• Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.
• La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

8. Théorème des valeurs intermédiaires

1) *Activité*

Posons le problème suivant :

$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f, a et b sont deux réels du domaine de définition de f (on suppose que $a < b$).

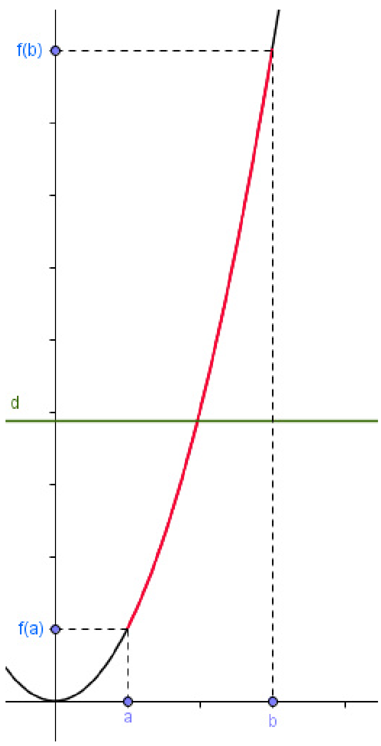
« quel que soit le réel k choisi entre $f(a)$ et $f(b)$,
existe-t-il un réel x de $[a\,;\,b]$ tel que $f(x) = k$? »

ou, graphiquement,

« quel que soit le réel k choisi entre $f(a)$ et $f(b)$,
la droite d d'équation $y = k$ coupe-t-elle $\mathscr{C}_f$ sur $[a\,;\,b]$? »

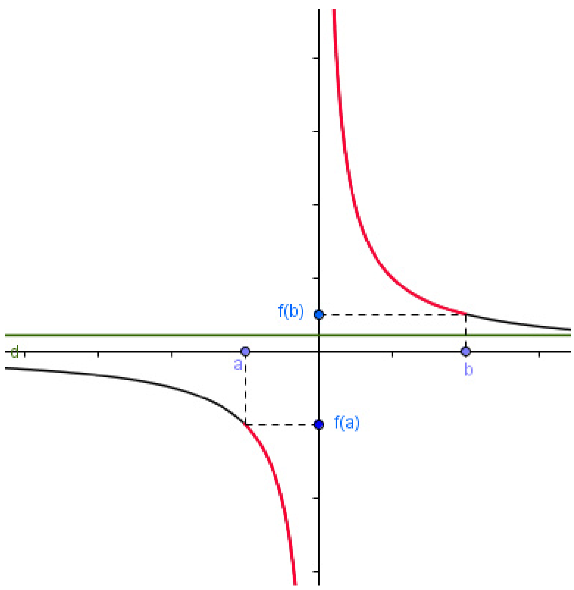
1. Quelques exemples

Figure 1 : $f(x) = x^2$, $a = 1$ et $b = 3$



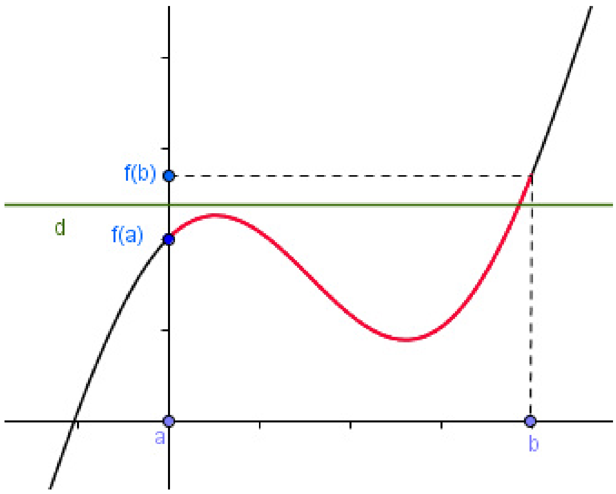
Quel que soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, d coupe $\mathscr{C}_f$ une seule fois.

Figure 2 : $f(x) = \frac{1}{x}$, $aa = -1$ et $b = 2$



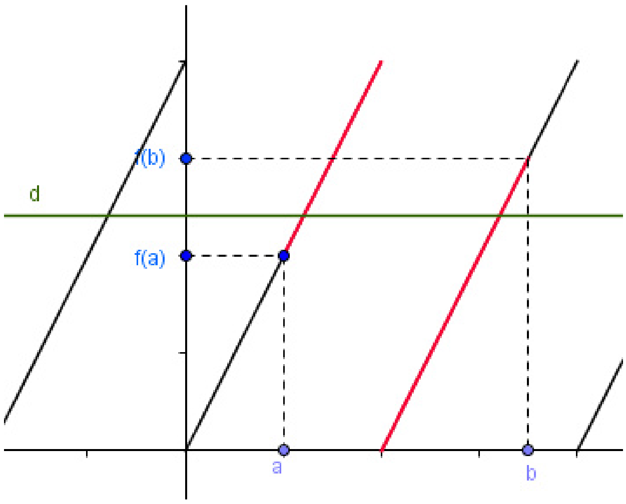
Quel que soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, d ne coupe pas $\mathscr{C}_f$.

Figure 3 : $f(x)=2\cos(x)+x$, $a=0$ et $b=4$



Quel que soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, d coupe $\mathscr{C}_f$ au moins une fois.

Figure 4 : $f(x)=2(x-E(x))$, $a=0,5$ et $b=1,75$



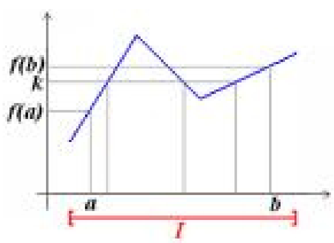
Quel que soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, d coupe $\mathscr{C}_f$ deux fois.

2. Conjecture

Une condition suffisante pour que d coupe dans tous les cas au moins une fois $\mathscr{C}_f$ semble être que l'on puisse tracer $\mathscr{C}_f$ entre a et b "sans lever le crayon"
Cette condition n'est pas nécessaire comme le montre la figure 4.

2) Théorème des valeurs intermédiaires

<u>Théorème des valeurs intermédiaires</u> (admis) : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et, a et b deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.



Ce théorème signifie que si les hypothèses sont réalisées alors pour tout réel k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ d'inconnue x admet au moins une solution entre a et b.

• Ce théorème traduit de façon rigoureuse la propriété suivante :

« A et B sont deux points d'abscisses a et b de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f.
Si on peut tracer $\mathscr{C}_f$ entre A et B sans lever le crayon, alors toute droite d'équation $y=k$ où k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, coupe la courbe $\mathscr{C}_f$ en au moins un point. »

• La continuité de f est une condition suffisante pour assurer l'existence de c, elle n'est pas nécessaire (voir la figure 4 de l'activité précédente).

3) Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 9 : Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un et un seul réel c dans $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c)=k$.

4) Exemple

Démontrer que l'équation $\cos x = x$ *a une unique solution dans* $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

❶ *Démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution :*

Soit f la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\cos(x)-x$. Montrons que f s'annule une seule fois sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

La fonction f est dérivable sur **R**, donc sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur **R**. On en déduit alors que la fonction f est continue sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout x de $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)=-\sin x-1$. Or $-1\leq \sin x\leq 0$, d'où $-2\leq -\sin x-1\leq -1$; et par suite, $f'(x)<0$.

La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

De plus, $f(0)=1-0=1$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$; donc le réel 0 est compris entre $f(0)$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Les hypothèses du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires étant vérifiées, on en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution c dans $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

❷ *Justification attendue dans une copie :*

Après avoir étudié le sens des variations de f, on construit son tableau de variations :

x	0	c	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	0	$-\dfrac{\pi}{2}$

Puis, on écrit, « par lecture du tableau de variations, la fonction f s'annule une fois et une seule dans $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

❸ *Déterminer un encadrement au centième de la solution.*

À l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

X	Y1
0	1
1	-.4597
2	-2.416
3	-3.99
4	-4.654
5	-4.716
6	-5.04

La solution est comprise entre 0 et 1.

X	Y1
0	1
.1	.895
.2	.78007
.3	.65534
.4	.52106
.5	.37758
.6	.22534

La solution est comprise entre 0 et 0,1.

X	Y1
0	1
.01	.98995
.02	.9798
.03	.96955
.04	.9592
.05	.94875
.06	.9382

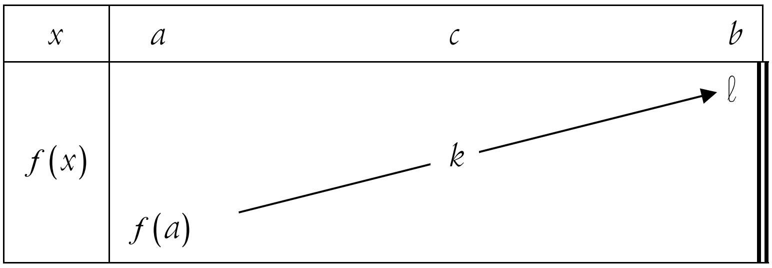
La solution est comprise entre 0 et 0,01.

Remarque : Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie.

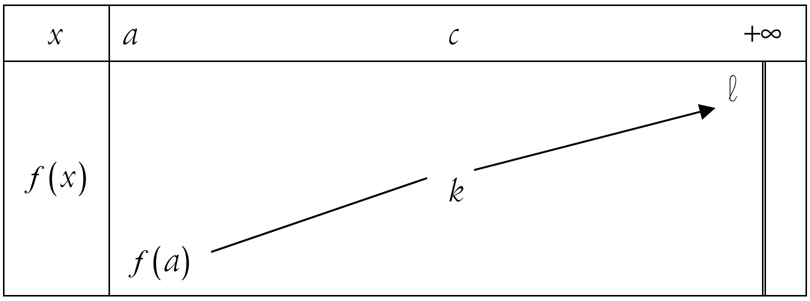
5) Remarques

• Ce théorème peut s'étendre à une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert éventuellement non borné en utilisant les limites de f aux bornes de cet intervalle. Par exemple :

→ Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a ; b[$, alors pour tout réel k dans l'intervalle $\left[f(a) ; \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x)\right[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a ; b[$.



→ Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a\ ;\ +\infty[$, alors pour tout réel k dans l'intervalle $\left[f(a)\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$, l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a\ ;\ +\infty[$.



• Si f est continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$ et si $f(a)\times f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ a une solution et une seule sur $[a\ ;\ b]$.