## Liban

### *Exercice 1*

**Partie A**

1) Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (*EBG*) s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$.
Or $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$ ; d'où $\overrightarrow{DF}$ a pou coordonnées $(1\,;1\,;1)$ dans le repère.
$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC}$ ; alors $\overrightarrow{EB}$ a pou coordonnées $(0\,;1\,;\,-1)$ dans le repère.
$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} = -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ ; alors $\overrightarrow{EG}$ a pou coordonnées $(-1\,;1\,;0)$ dans le repère.
De plus, $\overrightarrow{DF} \bullet \overrightarrow{EB} = 1\times 0 + 1\times 1 + 1\times(-1) = 0$ et $\overrightarrow{DF} \bullet \overrightarrow{AE} = 1\times(-1) + 1\times 1 + 1\times 0 = 0$.
Par suite, **$\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (*EBG*)**.

2) D'après la question précédente, (*EBG*) a pour équation $x + y + z + d = 0$.
Or $B(1\,;1\,;0)$ appartient au plan, d'où $d = -2$.
Donc **le plan (*EBG*) a pour équation $x + y + z - 2 = 0$**.

3) Une représentation paramétrique de la droite (*DF*) est $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$.

$I$ est le point du plan (*EBG*) et de la droite (*DF*).

Résolvons le système $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ 3t - 2 = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ t = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Par conséquent, **$I$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$**.

**Partie B**

1) ● *EDB* est équilatéral (les côtés de ce triangle sont en effet, des diagonales des faces du cube). D'où : **si *M* est confondu avec *D*, alors $\widehat{EMB} = \frac{\pi}{3}$**.

● *EFB* est un triangle rectangle en *F*. D'où : **si *M* est confondu avec *F*, alors $\widehat{EMB} = \frac{\pi}{2}$**.

2) a) $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$ ; par suite : $\begin{cases} x_M - 0 = x \times 1 \\ y_M - 0 = x \times 1 \\ z_M - 0 = x \times 1 \end{cases}$.

Par conséquent, **$M$ a pour coordonnées $(x\,;x\,;x)$**.

b) $\overrightarrow{ME} \bullet \overrightarrow{MB} = (1-x)\times(1-x)+(-x)\times(1-x)+(1-x)\times(-x) = 3x^2-4x+1$. De plus,

$\overrightarrow{ME} \bullet \overrightarrow{MB} = ME \times MB \times \cos\left(\widehat{EMB}\right) = \sqrt{(1-x)^2+(-x)^2+(1-x)^2} \times \sqrt{(1-x)^2+(1-x)^2+(-x)^2} \times \cos(\theta)$

On en déduit que : $\mathbf{\cos(\theta)} = \dfrac{3x^2-4x+1}{(1-x)^2+(1-x)^2+(-x)^2} \mathbf{= \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}}$.

3) a) **Le triangle *MEB* est rectangle en *M* lorsque $\cos(\theta)=0$, c'est-à-dire lorsque $x = \dfrac{1}{3}$ (*M* est confondu avec *J*) ou lorsque $x = 1$ (*M* est alors confondu avec *F*).**

b) La fonction cosinus est décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

Par suite, $\theta$ est maximal lorsque $\cos(\theta)$ est minimal.

D'après le tableau de variations, $f$ admet un minimum lorsque $x = \dfrac{2}{3}$.

Par conséquent, l'angle $\theta$ est maximal lorsque $\boldsymbol{M = I}$.

***Exercice 2***

## Partie A

1) $\dfrac{75\times1+19\times3+10\times5+5\times7}{75+19+10+5} = \dfrac{217}{109} \approx 2$. **La durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking est égale à environ 2 minutes**.

2) a) Comme l'espérance mathématique d'une variable aléatoire, suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$, alors $\dfrac{1}{\lambda} = 2$. Par conséquent, $\boldsymbol{\lambda = 0{,}5}$ **min**.

b) On est amené à rechercher $p(0 \le T \le 2)$.

Or : pour tous réels $a$ et $b$, $p(T \in [a\ ;\ b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_a^b = -e^{-\lambda b} + e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

D'où $p(0 \le T \le 2) = e^{-0{,}5\times0} - e^{-0{,}5\times2} = 1 - \dfrac{1}{e} \approx 0{,}6321$.

**La probabilité que la voiture mette moins de deux minutes à franchir la barrière est égale à environ 0,6321**.

c) On recherche $P_{T\ge1}(T \le 2)$.

Or $P_{T\ge1}(T \le 2) = 1 - P_{T\ge1}(T \ge 2) = 1 - P(T \ge 1) = P(T \le 1) = e^{-0{,}5\times0} - e^{-0{,}5\times1} = 1 - e^{-0{,}5} \approx 0{,}3964$, d'après la loi de durée de vie sans vieillissement.

**Sachant que la voiture attend depuis 1 minute à l'entrée du parking, la probabilité que la franchisse la barrière dans la minute suivante est égale à environ 0,3964**.

## Partie B

1) a) **La durée moyenne de stationnement d'une voiture est $\mu = 70$ min**.

b) On cherche $P(D \ge 120)$. D'après la calculatrice, $P(D \ge 120) \approx 0{,}0478$.

Donc **la probabilité que sa durée moyenne de stationnement dépasse les 2 heures est égale à environ 0,0478**.

c) On cherche le réel $t$ tel que $P(T \le a) = 0{,}99$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $a \approx 140$.

**Le temps maximum de stationnement pour un véhicule est de 140 minutes**.

2) Soit $G$ la variable aléatoire associée au gain du gestionnaire sur une place de parking.
$G$ prend les valeurs 0 ; 3,5 ; $3{,}5+t$ et $3{,}5+2t$.

$p(G=0)=P(0\le D\le 15)\approx 0{,}0334$ ; $p(G=3{,}5)=P(15\le D\le 60)\approx 0{,}3361$ ;

$p(G=3{,}5+t)=P(60\le D\le 120)\approx 0{,}5828$ et $p(G=3{,}5+2t)=P(120\le D\le 180)\approx 0{,}0477$.

Par suite, $E(G)=0\times 0{,}0334+3{,}5\times 0{,}3361+(3{,}5+t)\times 0{,}5828+(3{,}5+2t)\times 0{,}0477=5$.

Ce qui équivaut à $0{,}6782t+3{,}3831=5$, c'est-à-dire à $t=\dfrac{1{,}6169}{0{,}6782}\approx 2{,}38$.

**Le gestionnaire du parking devra fixer le prix de l'heure supplémentaire à 2,38 € afin d'obtenir un prix moyen de 5 euros**.

### Partie C

Soit $T'$ la variable aléatoire de paramètres $\mu'=30$ et $\sigma'$, on doit avoir $P(T'\le 37)=0{,}75$.
Comme $T'$ suit une loi normale de paramètres $\mu'=30$ et $\sigma'$, alors la variable aléatoire
$Z=\dfrac{T'-30}{\sigma'}$ suit une loi normale centrée réduite.

D'où $P(T'\le 37)=0{,}75$ équivaut à $P_N\left(Z\le\dfrac{37-30}{\sigma'}\right)=0{,}75$, c'est-à-dire à $P_N\left(Z\le\dfrac{7}{\sigma'}\right)=0{,}75$.

D'après la calculatrice, $\dfrac{7}{\sigma'}\approx 0{,}6745$ ; c'est-à-dire $\sigma'=\dfrac{7}{0{,}6745}\approx 10{,}38$.

Cherchons $P(10\le T'\le 50)$ ; d'après la calculatrice, $P(10\le T'\le 50)\approx 0{,}946$ ; ce qui signifie qu'**environ 94,6 % des voitures ont un temps de stationnement compris entre 10 et 50 minutes. Son objectif est presque atteint**.

### *Exercice 3*

L'abscisse du point $A_k$ est la valeur qui annule la dérivée de la fonction $f_k$.
La fonction $f_k$ est dérivable sur **R** en tant que somme de fonctions dérivables sur **R**.
Pour tout réel $x$, $f_k'(x)=1-ke^{-x}$.

Or $f_k'(x)=0$ équivaut à $1-ke^{-x}=0$, c'est-à-dire à $e^{-x}=\dfrac{1}{k}$ car $k$ est un réel non nul.

Par suite, $f_k'(x)=0$ équivaut à $-x=\ln\left(\dfrac{1}{k}\right)=-\ln(k)$, c'est-à-dire à $x=\ln(k)$.

De plus, $f_k(\ln(k))=\ln(k)+ke^{-\ln(k)}=\ln(k)+k\times\dfrac{1}{k}=1+\ln(k)$.

Par conséquent, pour tout réel $k$ strictement positif, le point $A_k$ a pour coordonnées $(\ln(k)\ ;\ 1+\ln(k))$ et appartient donc à la droite d'équation $y=x+1$

Par conséquent, **pour tout réel $k$ strictement positif, les points $A_k$ sont alignés**.

### *Exercice 4 (enseignement obligatoire)*

### Partie A

1) On a $f=30\ln u$ avec $u(x)=\dfrac{20x}{1-x}$.

La fonction $u$ est dérivable et strictement positive sur $]0\ ;\ 1[$, et pour tout $x$ de $]0\ ;\ 1[$,

$$u'(x)=\frac{20(1-x)-20x\times(-1)}{(1-x)^2}=\frac{20}{(1-x)^2}.$$

D'où $f$ est dérivable sur $]0\ ;\ 1[$, et $f'=30\times\frac{u'}{u}$.

Par suite, pour $x$ de $]0\ ;\ 1[$, $f'(x)=30\times\dfrac{\frac{20}{(1-x)^2}}{\frac{20x}{1-x}}=\dfrac{30}{x(1-x)}$.

Comme $x$ appartient à $]0\ ;\ 1[$, $x(1-x)>0$ ; par suite, $f'(x)>0$ pour tout $x$ de $]0\ ;\ 1[$.

Par conséquent, **la fonction $f$ est strictement croissante sur $]0\,;1[$**.

2) On cherche les valeurs de $x$ telles que $20\leq f(x)\leq 120$.

Comme $f$ est strictement croissante sur $]0\ ;\ 1[$, il suffit de trouver la valeur $x_0$ telle que $f(x_0)=20$ et la valeur $x_1$ telle que $f(x_1)=120$.

• $f(x_0)=20$ équivaut à $\ln\left(\frac{20x_0}{1-x_0}\right)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$ , c'est-à-dire à $\frac{20x_0}{1-x_0}=e^{\frac{2}{3}}$.

Or $\frac{20x_0}{1-x_0}=e^{\frac{2}{3}}$ équivaut à $20x_0=e^{\frac{2}{3}}(1-x_0)$, c'est-à-dire à $x_0=\dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{20+e^{\frac{2}{3}}}\approx 0{,}089$.

• $f(x_1)=120$ équivaut à $\ln\left(\frac{20x_1}{1-x_1}\right)=\frac{120}{30}=4$ , c'est-à-dire à $\frac{20x_1}{1-x_1}=e^4$.

Or $\frac{20x_1}{1-x_1}=e^4$ équivaut à $20x_1=e^4(1-x_1)$, c'est-à-dire à $x_1=\dfrac{e^4}{20+e^4}\approx 0{,}732$.

• Par suite, lorsque $x\in[x_0\ ;\ x_1]$, $20\leq f(x)\leq 120$. On prendra la valeur approchée par excès de $x_0$ et la valeur approchée par défaut de $x_1$.

Par conséquent, **le diamètre doit être compris entre 0,9 m et 0,73 m pour que ce modèle reste conforme à ses conditions de validité**.

## Partie B

1) a) **Ce nombre signifie que chaque année, entre 70 ans et 80 ans, l'arbre a grandi de 0,245 mètre**.

b) **Dans la cellule C3, on entre la formule** $\boxed{\texttt{= (C2−B2)/(C1−B1)}}$.

2) $f(0{,}27)=30\ln\left(\frac{20\times 0{,}27}{1-0{,}27}\right)=30\ln\left(\frac{5{,}4}{0{,}73}\right)\approx 60$. Un tel arbre a donc 60 ans.

Or sur la période de 50 ans à 70 ans, l'arbre grandit de 0,22 m par année.
D'où $11{,}2+10\times 0{,}22=13{,}4$ ; **cet épicéa mesure donc 13,4 m à 60 ans**.

3) a) Complétons le tableau :

| **Âge (en années)** | 50 | 70 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 120 | 130 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Vitesse de croissance (en mètre par année)** | | 0,22 | 0,245 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,24 | 0,24 | 0,24 | 0,22 | 0,205 | 0,1675 |

La vitesse est donc maximale à 85 ans, 90 ans et 95 ans. Donc **la qualité du bois est la meilleure entre 80 et 95 ans**.

b) $f(0,7)=30\ln\left(\dfrac{20\times 0,7}{1-0,7}\right)=30\ln\left(\dfrac{14}{0,3}\right)\approx 115$. Comme cette valeur n'appartient pas à la période pendant laquelle la vitesse de croissance est maximale, c'est-à-dire lorsque la qualité du bois est la meilleure, **il est donc cohérent de demander aux bûcherons de couper cet arbre**.

## *Exercice 4 (enseignement de spécialité)*

1) a)

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{2k+1}$ | **5** | **3** | **4** | **0** | **9** | **6** | **3** | **1** |
| $2a_{2k+1}$ | **10** | **6** | **8** | **0** | **18** | **12** | **6** | **2** |
| $R$ | **1** | **6** | **8** | **0** | **0** | **3** | **6** | **2** |
| $I$ | **1** | **7** | **15** | **15** | **15** | **18** | **24** | **26** |

b)

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{2k}$ | 6 | 5 | 0 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| $P$ | 6 | 11 | 11 | 13 | 18 | 19 | 23 |

$S=I+P+c=26+23+1=50$ ; comme 50 est un multiple de 10, alors **le numéro de la carte est bien correct**.

c)

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{2k+1}$ | 6 | 3 | 4 | 0 | 9 | 6 | 3 | 1 |
| $2a_{2k+1}$ | 12 | 6 | 8 | 0 | 18 | 12 | 6 | 2 |
| $R$ | 31 | 6 | 8 | 0 | 0 | 3 | 6 | 2 |
| $I$ | 3 | 9 | 17 | 17 | 17 | 20 | 26 | 28 |

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{2k}$ | $a$ | 5 | 0 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| $P$ | $a$ | 5 + $a$ | 5 + $a$ | 7 + $a$ | 12 + $a$ | 13 + $a$ | 17 + $a$ |

Par suite, $S=I+P+c=28+17+a+1=46+a$.
Pour que le numéro de la carte soit correct, il faut que $46+a$ soit divisible par 10 et que $a$ soit un chiffre compris entre 0 et 9. **Il faut donc que *a* soit égal à 4**.

2) • Existence : Soit $S'=I+P$. Par suite, $S=S'+c$.
Si $S'$ est un multiple de 10, alors il existe $c=0$ rendant le numéro de carte correct.

Si $S'$ n'est pas un multiple de 10, alors il existe un entier r compris entre 0 et 9 tel que $S' \equiv r \quad [10]$. Pour rendre le numéro de carte correct, il suffit de prendre $c$ tel que $c + r \equiv 0 \quad [10]$

Comme $c$ est un chiffre entre 0 et 9, alors il existe une clé $c$, telle que $c = 10 - r$.

● Unicité : supposons qu'il existe deux clés rendant le numéro correct : $c$ et $c'$.
Par suite, $I + P + c \equiv 0 \quad [10]$ et $I + P + c' \equiv 0 \quad [10]$.

D'où $c \equiv c' \quad [10]$. Comme $c$ et $c'$ sont deux chiffres compris entre 0 et 9, alors $c = c'$.

Par conséquent, **il existe une clé $c$ rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique**.

3) Prenons un numéro contenant que le chiffre $a$.

| $a$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{2k+1}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $2a_{2k+1}$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| $R$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | 5 | 7 | 0 |
| $I = 8R$ | 0 | 16 | 32 | 48 | 64 | 8 | 24 | 40 | 56 | 0 |

| $a$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{2k}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $P = 7a$ | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |

| $a$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | **0** | 24 | 48 | 72 | 96 | 48 | 72 | 96 | **120** | 72 |

Comme $S$ doit être un multiple de 10, alors **les numéros de carte corrects comportant les mêmes chiffres sont : 0000 0000 0000 0000 et 8888 8888 8888 8888**.

4) Prenons le numéro correct donné dans la question 1) : 5635 4002 9561 3411.

● Échangeons le 1 et le 6 ; on obtient le numéro : 5635 4002 9516 3411.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{2k+1}$ | 5 | 3 | 4 | 0 | 9 | 1 | 3 | 1 |
| $2a_{2k+1}$ | 10 | 6 | 8 | 0 | 18 | 2 | 6 | 2 |
| $R$ | 1 | 6 | 8 | 0 | 0 | 2 | 6 | 2 |
| $I$ | 1 | 7 | 15 | 15 | 15 | 17 | 23 | 25 |

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{2k}$ | 6 | 5 | 0 | 2 | 5 | 6 | 4 |
| $P$ | 6 | 11 | 11 | 13 | 18 | 24 | 28 |

Donc $S = I + P + c = 25 + 28 + 1 = 54$ ; ce n'est donc un numéro correct.

● Échangeons le 1 et le 3 ; on obtient le numéro : 5635 4002 9563 1411.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{2k+1}$ | 5 | 3 | 4 | 0 | 9 | 6 | 1 | 1 |
| $2a_{2k+1}$ | 10 | 6 | 8 | 0 | 18 | 12 | 2 | 2 |
| $R$ | 1 | 6 | 8 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 |
| $I$ | 1 | 7 | 15 | 15 | 15 | 18 | 20 | 22 |

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{2k}$ | 6 | 5 | 0 | 2 | 5 | 3 | 4 |
| $P$ | 6 | 11 | 11 | 13 | 18 | 21 | 25 |

Donc $S = I + P + c = 22 + 25 + 1 = 48$ ; ce n'est donc un numéro correct.

● Lorsqu'on a échangé des chiffres consécutifs distincts dont l'un des deux est 1, les nombres ne sont plus corrects. **On ne peut donc pas déterminer l'autre chiffre permuté**.