

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

**SESSION 2016**

## MATHÉMATIQUES

**Série S**

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

**Coefficient : 9**

### ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10.

**Le sujet comporte une feuille d'annexe à la page 10/10 à remettre avec la copie.**

## EXERCICE 1 (4 points)

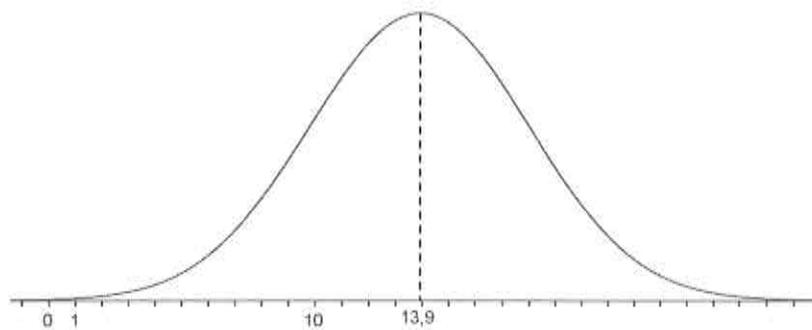
*Commun à tous les candidats*

*Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.*

### Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire  $T$  suivant une loi normale de moyenne  $\mu = 13,9$  et d'écart type  $\sigma$ .

La fonction densité de probabilité de  $T$  est représentée ci-dessous :



1. On sait que  $P(T \geq 22) = 0,023$ .  
En exploitant cette information :
  - a. Hachurer, sur le graphique donné en annexe page 10/10, deux domaines distincts dont l'aire est égale à 0,023.
  - b. Déterminer  $P(5,8 \leq T \leq 22)$ . Justifier le résultat.  
Montrer qu'une valeur approchée de  $\sigma$  au dixième est 4,1.
2. On choisit un jeune en France au hasard.  
  
Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine.  
Arrondir au centième.

### Partie B

*Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.*

La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des œuvres et la protection des droits sur internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.

Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole ( $\mathcal{P}$ ) suivant :

On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.  
 Pour chaque jeune de cet échantillon :

- le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ;  
 l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
- l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;

- si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
- si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
- si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note  $p$  la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

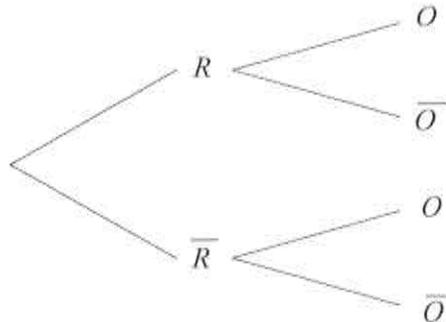
**1. Calculs de probabilités**

On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole ( $\mathcal{P}$ ).

On note :  $R$  l'évènement « le résultat du lancer est pair ».

$O$  l'évènement « le jeune a répondu Oui ».

Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire que la probabilité  $q$  de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :

$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

**2. Intervalle de confiance**

a. À la demande de la Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole ( $\mathcal{P}$ ). Sur un échantillon de taille 1500, il dénombre 625 réponses « Oui ». Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion  $q$  de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

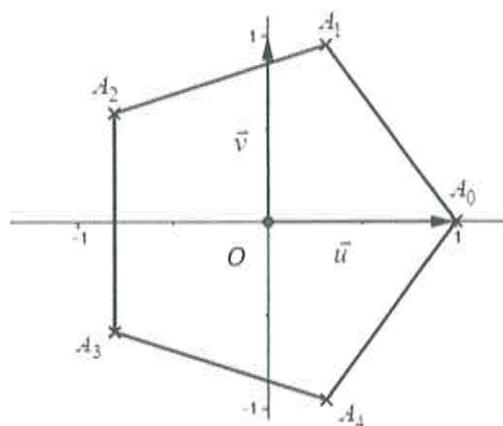
b. Que peut-on en conclure sur la proportion  $p$  de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

## EXERCICE 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère le pentagone régulier  $A_0A_1A_2A_3A_4$  de centre  $O$  tel que  $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$ .



On rappelle que dans le pentagone régulier  $A_0A_1A_2A_3A_4$  ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points  $A_0, A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier  $k$  appartenant à  $\{0; 1; 2; 3\}$  on a  $(\overrightarrow{OA_k}; \overrightarrow{OA_{k+1}}) = \frac{2\pi}{5}$ .

1. On considère les points  $B$  d'affixe  $-1$  et  $J$  d'affixe  $\frac{i}{2}$ .

Le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $J$  et de rayon  $\frac{1}{2}$  coupe le segment  $[BJ]$  en un point  $K$ .

Calculer  $BK$ , puis en déduire  $BK$ .

2. a. Donner sous forme exponentielle l'affixe du point  $A_2$ . Justifier brièvement.

b. Démontrer que  $BA_2^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ .

- c. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

Calcul formel	
1	$\cos(4\pi/5)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{1}{4}(-\sqrt{5}-1)$
2	$\text{sqrt}((3-\text{sqrt}(5))/2)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$

« sqrt » signifie « racine carrée »

En déduire, grâce à ces résultats, que  $BA_2 = BK$ .

3. Dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  donné en annexe page 10/10, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

### EXERCICE 3 (5 points)

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

#### Partie A

On considère les matrices  $M$  de la forme  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres entiers.

Le nombre  $3a - 5b$  est appelé le déterminant de  $M$ . On le note  $\det(M)$ .

Ainsi  $\det(M) = 3a - 5b$ .

1. Dans cette question on suppose que  $\det(M) \neq 0$  et on pose  $N = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$ .

Justifier que  $N$  est l'inverse de  $M$ .

2. On considère l'équation  $(E) : \det(M) = 3$ .

On souhaite déterminer tous les couples d'entiers  $(a ; b)$  solutions de l'équation  $(E)$ .

a. Vérifier que le couple  $(6 ; 3)$  est une solution de  $(E)$ .

b. Montrer que le couple d'entiers  $(a ; b)$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $3(a - 6) = 5(b - 3)$ .

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$ .

#### Partie B

1. On pose  $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ .

En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de  $Q$ .

2. *Codage avec la matrice  $Q$*

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice  $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  on utilise la procédure ci-après :

**Étape 1 :** On associe au mot la matrice  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  où  $x_1$  est l'entier correspondant à la première lettre du mot et  $x_2$  l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

**Étape 2 :** La matrice  $X$  est transformée en la matrice  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  telle que  $Y = QX$ .

**Étape 3 :** La matrice  $Y$  est transformée en la matrice  $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$  telle que  $r_1$  est le reste de la division euclidienne de  $y_1$  par 26 et  $r_2$  est le reste de la division euclidienne de  $y_2$  par 26.

**Étape 4 :** À la matrice  $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$  on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

$$\text{Exemple : JE} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{OF}$$

Le mot JE est codé en le mot OF.

Coder le mot DO.

### 3. Procédure de décodage

On conserve les mêmes notations que pour le codage.

Lors du codage, la matrice  $X$  a été transformée en la matrice  $Y$  telle que  $Y = QX$ .

a) Démontrer que  $3X = 3Q^{-1}Y$  puis que  $\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{cases}$ .

b) En remarquant que  $9 \times 3 \equiv 1 \pmod{26}$ , montrer que  $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{cases}$ .

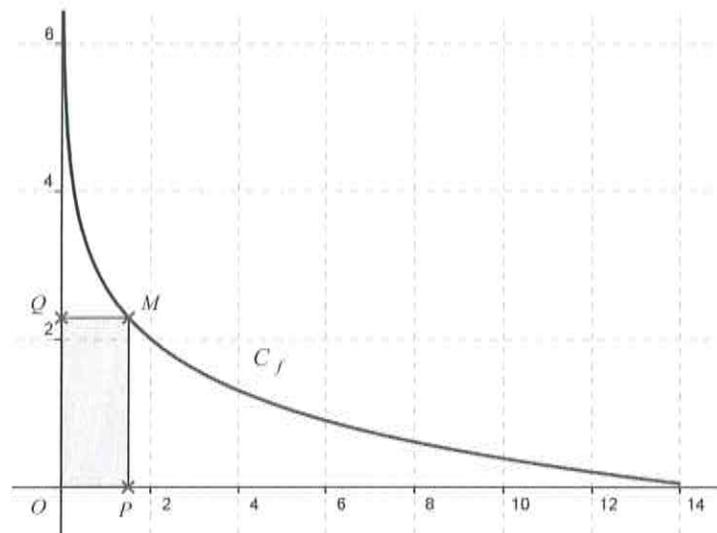
c) Décoder le mot SG.

## EXERCICE 4 (3 points)

*Commun à tous les candidats*

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; 14]$  par  $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ .

La courbe représentative  $C_f$  de la fonction  $f$  est donnée dans le repère orthogonal d'origine  $O$  ci-dessous :



À tout point  $M$  appartenant à  $C_f$ , on associe le point  $P$  projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des abscisses, et le point  $Q$  projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle  $OPMQ$  est-elle constante quelle que soit la position du point  $M$  sur  $C_f$  ?
- L'aire du rectangle  $OPMQ$  peut-elle être maximale ?  
Si oui, préciser les coordonnées du point  $M$  correspondant.

Justifier les réponses.

## EXERCICE 5 (5 points)

*Commun à tous les candidats*

On souhaite stériliser une boîte de conserve.

Pour cela, on la prend à la température ambiante  $T_0 = 25^\circ\text{C}$  et on la place dans un four à température constante  $T_F = 100^\circ\text{C}$ .

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à  $85^\circ\text{C}$ .

*Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.*

### Partie A : Modélisation discrète

Pour  $n$  entier naturel, on note  $T_n$  la température en degré Celsius de la boîte au bout de  $n$  minutes. On a donc  $T_0 = 25$ .

Pour  $n$  non nul, la valeur  $T_n$  est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	$T$ prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de $n$ Pour $i$ allant de 1 à $n$ faire $T$ prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher $T$

- Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.  
Arrondir à l'unité.
- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$ .
- Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

### Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie,  $t$  désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant  $t$  (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par  $f(t)$  (exprimée en degré Celsius) avec :

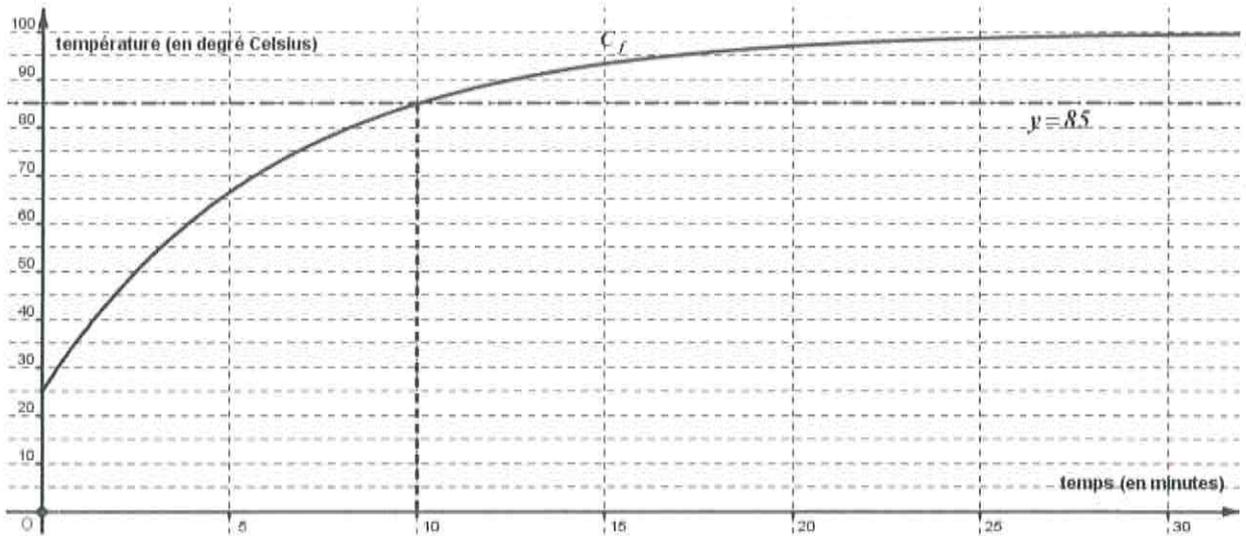
$$f(t) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

- Étudier le sens de variations de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ .
  - Justifier que si  $t \geq 10$  alors  $f(t) \geq 85$ .

2. Soit  $\theta$  un réel supérieur ou égal à 10.

On note  $A(\theta)$  le domaine délimité par les droites d'équation  $t = 10$ ,  $t = \theta$ ,  $y = 85$  et la courbe représentative  $C_f$  de  $f$ .

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps  $\theta$ , si l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine  $A(\theta)$  est supérieure à 80.



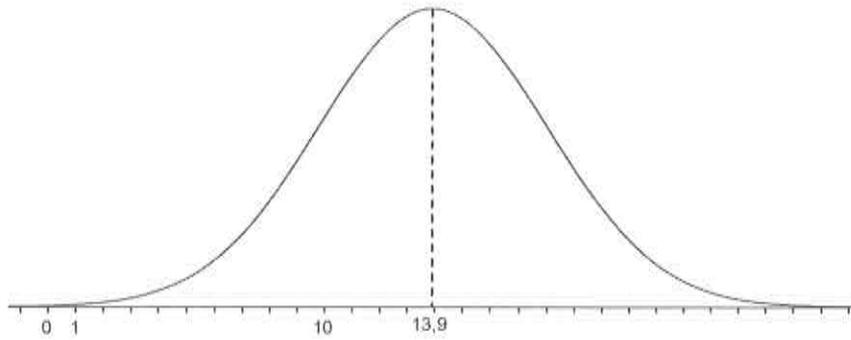
a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe page 10/10, que l'on a  $A(25) > 80$ .

b. Justifier que, pour  $\theta \geq 10$ , on a  $A(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10} t} dt$ .

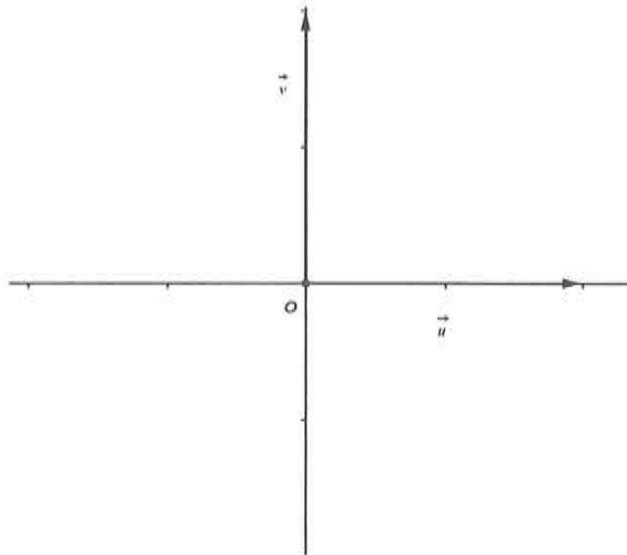
c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

# ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

## EXERCICE 1



## EXERCICE 2



## EXERCICE 5

