BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2013

MATHÉMATIQUES

spécialité

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9 dont deux annexes :
Annexe 1 page 8
Annexe 2 page 9, à rendre avec la copie

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée, conformément à la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 4 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble **N** des entiers naturels par

$$u_0 = 0\ ;\ v_0 = 1 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :        u, v et w des nombres réels
                   N et k des nombres entiers
Initialisation :   u prend la valeur 0
                   v prend la valeur 1
Début de l'algorithme
Entrer la valeur de N
Pour k variant de 1 à N
        w prend la valeur u
        u prend la valeur (w+v)/2
        v prend la valeur (w+2v)/3
Fin du Pour
Afficher u
Afficher v
Fin de l'algorithme
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3. Pour tout entier naturel n on définit le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et la matrice A par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$.

b. Démontrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$ pour tout entier naturel n.

4. On définit les matrices P, P′ et B par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit PP′.

On admet que $P'BP = A$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = P'B^nP$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n

5.

a. Montrer que $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

b. Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).