

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2010

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n°99-186 du 16 novembre 1999.

2 feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

--**

Le candidat doit traiter les quatre exercices

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

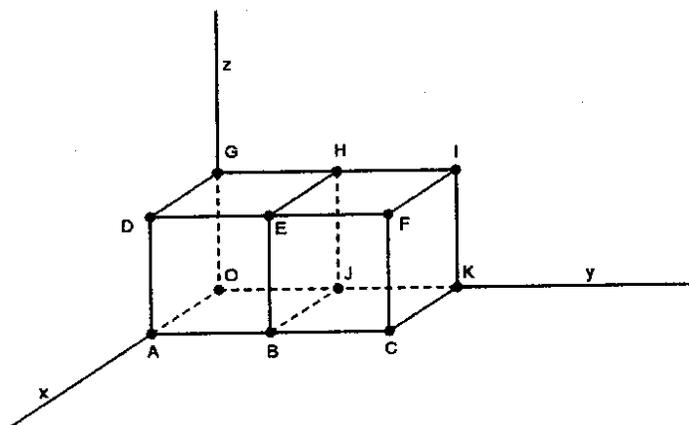
Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM qui comporte 8 questions, numérotées de 1 à 8. À chaque question, une seule des trois réponses notée **a**, **b** ou **c** est exacte. On demande au candidat d'indiquer sur sa copie, pour chaque question, quelle est la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fautive ou une absence de réponse n'enlèvent pas de point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 2, 0), D(1, 0, 1),$
 $E(1, 1, 1), F(1, 2, 1), G(0, 0, 1), H(0, 1, 1),$
 $I(0, 2, 1), J(0, 1, 0), K(0, 2, 0)$ comme indiqués sur la figure ci-contre :



1) Question 1 : Le triangle GHI est :

Réponse a : isocèle.

Réponse b : équilatéral.

Réponse c : rectangle.

2) Question 2 : Le barycentre du système de points pondérés $\{(O, 2), (A, -1), (C, 1)\}$ est :

Réponse a : le point K .

Réponse b : le point I .

Réponse c : le point J .

3) Question 3 : Le produit scalaire $\overline{AH} \cdot \overline{FC}$ est égal à :

Réponse a : 1.

Réponse b : -1.

Réponse c : 2.

4) Question 4 : Les points B, C, I, H :

Réponse a : sont non coplanaires. Réponse b : forment un rectangle. Réponse c : forment un carré.

5) Question 5 : Une représentation paramétrique de paramètre t de la droite (KE) est :

Réponse a :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$$

Réponse b :
$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$$

Réponse c :
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

6) Question 6 : Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

Réponse a : $2x + 2y - z - 2 = 0$.

Réponse b : $x + y - 3 = 0$.

Réponse c : $x + y + 2z = 2$.

7) Question 7 : La distance du point C au plan (ADH) est :

Réponse a : $\sqrt{2}$.

Réponse b : 2.

Réponse c : $\frac{1}{2}$.

8) Question 8 : Le volume du tétraèdre $HJKB$ est égal à :

Réponse a : $\frac{1}{2}$.

Réponse b : $\frac{1}{6}$.

Réponse c : $\frac{1}{3}$.

Exercice 2 (5 points)

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$a = -2, \quad b = 2 - 2i\sqrt{3}, \quad c = 3 + 3i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad p = 10.$$

PARTIE A Étude de la configuration

1) Construction de la figure.

a) Placer les points A et P dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Déterminer les modules des nombres complexes b et c .

c) Utiliser les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 6 pour construire les points B et C .

2) Démontrer que le triangle BCP est équilatéral.

3) On note r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Vérifier que l'image Q du point C par r_A a pour affixe : $q = -4 + 4i\sqrt{3}$.

b) Vérifier l'égalité : $q = -2b$. Que peut-on en déduire pour les points B, O et Q ?

4) Soit R le symétrique de C par rapport à O .

a) Démontrer que les droites (AP) , (BQ) et (CR) sont concourantes en O .

b) Établir que : $AP = BQ = CR$.

PARTIE B On note f l'application qui, à tout point M du plan, associe le réel $f(M)$ défini par :

$$f(M) = MA + MB + MC.$$

1) Calculer $f(O)$.

2) Soient M un point quelconque et N son image par la rotation r_A .

Démontrer que : $MA = MN$ puis que $MC = NQ$.

3) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation.

En utilisant l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tout point M du plan, $f(M) \geq 12$.

Exercice 3 (4 points)
Commun à tous les candidats

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'événement : « le n -ième sondage est positif » est noté V_n , on note p_n la probabilité de l'événement V_n .

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

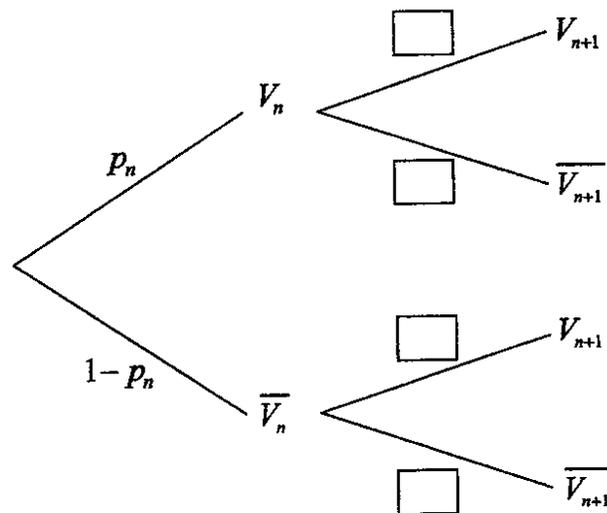
1) Calculer les probabilités des événements suivants :

- a) A : « les 2^{ème} et 3^{ème} sondages sont positifs » ;
- b) B : « les 2^{ème} et 3^{ème} sondages sont négatifs »

2) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^{ème} sondage soit positif.

3) n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4) Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

5) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

- a) Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
- b) Exprimer p_n en fonction de n .
- c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n .

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction.

PARTIE A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

L'unité graphique est 1cm.

1) Étude des limites

- Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
- Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
- Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe \mathcal{C} ?

2) Étude des variations de la fonction f

- Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x+1).$$

- Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3) Tracer la courbe \mathcal{C} dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$.

1) Calculer I_2 .

2) Une relation de récurrence

- Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.$$

- Calculer I_3 .

3) Étude de la limite de la suite de terme général I_n

- Établir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1; 2]$, on a : $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$.
- En déduire un encadrement de I_n , puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n) .