

CORRECTION DE L'INTERROGATION N° 1

Asymptote oblique

Le 5 octobre 2009

1) Soit un réel x de $] -3 ; +\infty[$.

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3} = \frac{(ax+b)(x+3)+c}{x+3} = \frac{ax^2 + 3ax + bx + 3b + c}{x+3} = \frac{ax^2 + (3a+b)x + 3b+c}{x+3}$$

Par identification, on obtient :
$$\begin{cases} a = -1 \\ 3a + b = 0 \\ 3b + c = 4 \end{cases}$$

Or
$$\begin{cases} a = -1 \\ 3a + b = 0 \\ 3b + c = 4 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a = -1 \\ b = -3a = 3 \\ c = 4 - 3b = 4 - 9 = -5 \end{cases}.$$

Par conséquent, **pour tout x de $] -3 ; +\infty[$, $f(x) = -x + 3 - \frac{5}{x+3}$.**

2) Pour tout x de $] -3 ; +\infty[$, $f(x) - (-x + 3) = -x + 3 - \frac{5}{x+3} + x - 3 = -\frac{5}{x+3}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3) = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-5}{x+3} \right) = 0, \text{ par quotient des limites.}$$

Par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 3)] = 0$.

Par conséquent, **la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = -x + 3$.**

3) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite (Δ) revient à chercher le signe de

$f(x) - (-x + 3)$, c'est-à-dire de $-\frac{5}{x+3}$. Or x appartient à $] -3 ; +\infty[$, d'où $x+3 > 0$.

Par suite, $-\frac{5}{x+3} < 0$, pour tout x de $] -3 ; +\infty[$.

Par conséquent, **$\mathcal{C}_f$ est en dessous de (Δ) sur $] -3 ; +\infty[$.**