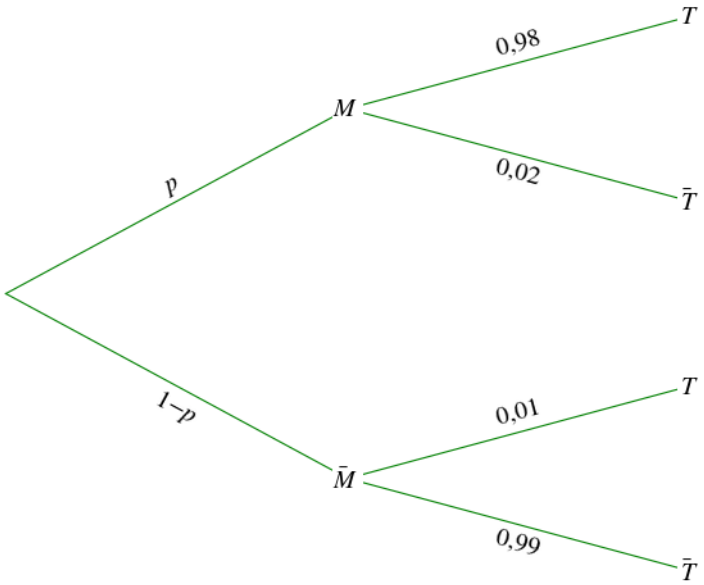
CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 7

Probabilités, fonction rationnelle, suite géométrique	***Pour le 24 février 2020***

Exercice 1

1) a)



b) $\boldsymbol{P(\mathrm{M}\cap\mathrm{T})} = P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})\times P(\mathrm{T}) = \boldsymbol{0{,}98p}$.

$\boldsymbol{P(\overline{\mathrm{M}}\cap\mathrm{T})} = P_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T})\times P(\mathrm{T}) = \boldsymbol{0{,}01(1-p)}$.

$\boldsymbol{P(\mathrm{T})} = P(\mathrm{M}\cap\mathrm{T}) + P(\overline{\mathrm{M}}\cap\mathrm{T}) = 0{,}98p + 0{,}01(1-p) = \boldsymbol{0{,}01+0{,}97p}$.

2) $\boldsymbol{f(p)} = P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \dfrac{P(\mathrm{M}\cap\mathrm{T})}{P(\mathrm{T})} = \dfrac{0{,}98p}{0{,}97p+0{,}01} = \boldsymbol{\dfrac{98p}{97p+1}}$.

3) On cherche p telle que $f(p) > 0{,}95$.

Or $f(p) > 0{,}95$ équivaut à $\dfrac{98p}{97p+1} > 0{,}95$.

Comme p appartient à $[0\ ;\ 1]$, alors $97p+1$ est strictement positif. On en déduit que :

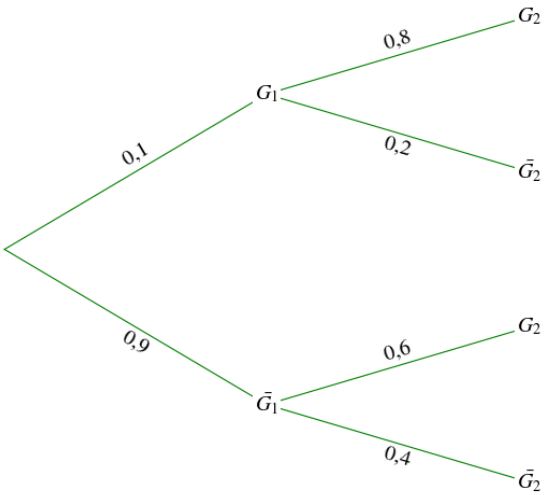
$98p > 0{,}95(97p+1)$; par suite, $5{,}85p > 0{,}95$.

Comme 5,85 > 0, alors $p > \dfrac{0{,}95}{5{,}85}$

Or $\dfrac{0{,}95}{5{,}85} \approx 0{,}1623$; par conséquent, **le test est fiable dès qu'il y a au moins 16,23 % de malades dans la population**.

Exercice 2

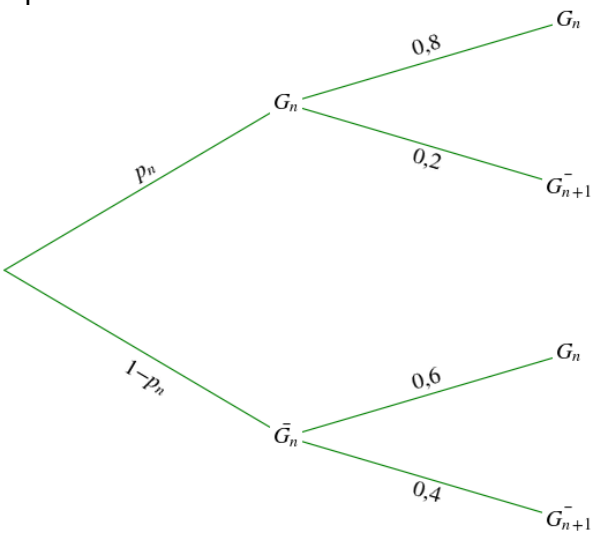
1) a) On réalise l'arbre pondéré suivant :



$p_2 = p(G_2) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p(\overline{G_1}) \times p_{\overline{G_1}}(G_2) = 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}08 + 0{,}54 = \mathbf{0{,}62}$.

b) On recherche $p_{G_2}(\overline{G_1})$. D'où $p_{G_2}(\overline{G_1}) = \dfrac{p(\overline{G_1} \cap G_2)}{p(G_2)} = \dfrac{0{,}9 \times 0{,}6}{0{,}62} = \dfrac{0{,}54}{0{,}62} = \mathbf{\dfrac{27}{31}}$.

2) a) On complète l'arbre pondéré :



b) $p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p(\overline{G_n}) \times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = p_n \times 0{,}8 + (1 - p_n) \times 0{,}6 = 0{,}2p_n + 0{,}6$.

Donc **pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$**.

3) a) $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{5}p_n - \dfrac{3}{20} = \dfrac{1}{5}\left(p_n - \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{5}u_n$.

Par conséquent, **(u_n) est la suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$ et de premier terme**

$u_1 = p_1 - \dfrac{3}{4} = \mathbf{-0{,}65}$.

b) D'après la question précédente, **pour tout entier naturel n non nul**,

$u_n = u_1 \times q^{n-1} = \mathbf{-0{,}65 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}}$.

c) Comme $u_n = p_n - \dfrac{3}{4}$, alors $p_n = u_n + \dfrac{3}{4}$. De plus, $0{,}65 = \dfrac{65}{100} = \dfrac{13}{20}$

D'où **pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$**.

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n}}{\frac{1}{5}} = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n}$. Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n} = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{4}$ (par produit et somme de limites).

4) $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ équivaut à $\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{13}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < 10^{-7}$, c'est-à-dire à $\frac{13}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < 10^{-7}$.

Par suite, $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ équivaut à $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < \frac{20}{13} \times 10^{-7}$, ou encore à $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - \frac{20}{13} \times 10^{-7} < 0$.

D'après la calculatrice, on a $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ **lorsque $n \geq 11$**.