DEVOIR MAISON N° 7	
Probabilités, fonction rationnelle, suite géométrique	***Pour le 24 février 2020***

Exercice 1

Le paludisme est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles du genre Anophèle.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

● la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;

● la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population.

On appelle :

● M l'événement : « L'individu choisi est atteint du paludisme »

● T l'événement : « Le test de l'individu choisi est positif »

On note p la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1) a) Construire un arbre de probabilité pondéré.

b) Exprimer $P(\mathrm{M} \cap \mathrm{T})$, $P(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T})$, puis $P(\mathrm{T})$ en fonction de p.

2) Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur 0 $[0\ ;\ 1]$ par : $f(p) = \dfrac{98p}{97p+1}$.

3) On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du paludisme est supérieure à 0,95.

En utilisant les résultats de la question 2), à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

Exercice 2

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.

On admet que :

• la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;

• s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;

• s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

• G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;

• p_n la probabilité de l'évènement G_n.

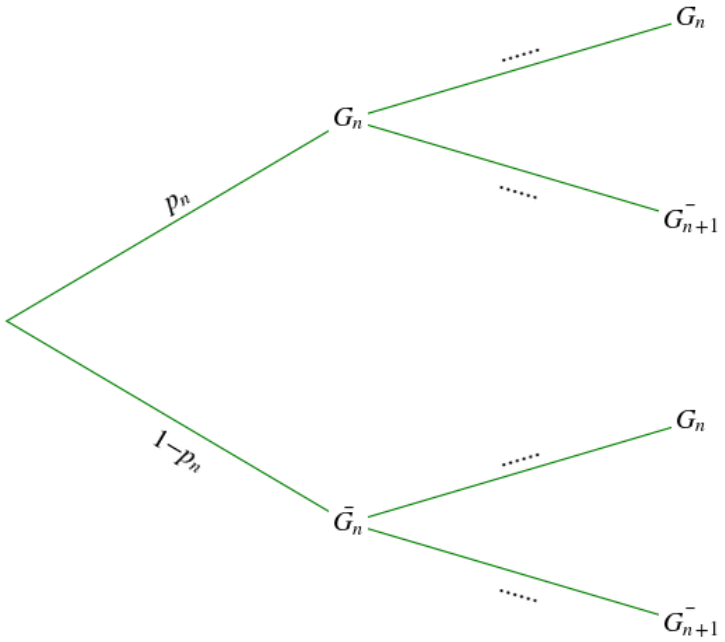
On a donc $p_1 = 0{,}1$.

Si besoin est, on donnera une approximation des résultats à 10^{-2}.

1) a) Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

b) Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

2) a) Compléter l'arbre pondéré suivant :



b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.

3) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n > 1$ par $u_n = p_n - \frac{3}{4}$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n non nul.

c) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

d) Déterminer la limite de la suite (p_n).

4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

Source : https://www.lemonde.fr/pixels/article/2019/08/08/sous-la-pression-l-industrie-du-jeu-video-va-rendre-les-loot-boxes-plus-transparentes_5497690_4408996.html