CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 6

Convexité	***Pour le 4 février 2020***

1) On a : $f = u \times e^v + 2$ avec $u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = -x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
D'où : $f' = u' \times e^v + u \times \left(e^v\right)' + 0 = u' \times e^v + u \times v' \times e^v$ avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = -1$.
Par suite, $\boldsymbol{f'(x)} = 3 \times e^{-x} + (3x-4) \times (-1) \times e^{-x} = \left(3 - (3x-4)\right)e^{-x} \boldsymbol{= (-3x+7)e^{-x}}$.

2) Comme $e^{-x} > 0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-3x+7$.
D'où :

x	0		$\frac{7}{3}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-2	↗	$3e^{-\frac{7}{3}}+2$	↘	$12e^{-4}+2$

$f(0) = (3 \times 0 - 4)e^0 + 2 = -4 + 4 = -2$; $f(4) = (3 \times 4 - 4)e^{-4} + 2 = 12e^{-4} + 2 \approx 2{,}22$;
$f\left(\frac{7}{3}\right) = \left(3 \times \frac{7}{3} - 4\right)e^{-\frac{7}{3}} + 2 = 3e^{-\frac{7}{3}} + 2 \approx 2{,}29$

3) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{7}{3}\right]$.

0 appartient à « l'intervalle image » $\left[-2\ ;\ 3e^{-\frac{7}{3}}+2\right]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{7}{3}\right]$.

La fonction f est strictement positive sur l'intervalle $\left[\frac{7}{3}\ ;\ 0\right]$.

Par conséquent, **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\ ;\ 4]$**.

b) En utilisant la calculatrice, $\boldsymbol{\alpha \approx 0{,}37}$.

4) On a : $F = u \times e^v + w$ avec $u(x) = 1 - 3x$, $v(x) = -x$ et $w(x) = 2x$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
D'où : $F' = u' \times e^v + u \times \left(e^v\right)' + w' = u' \times e^v + u \times v' \times e^v + w'$ avec $u'(x) = -3$, $v'(x) = -1$ et $w'(x) = 2$.
D'où, $\boldsymbol{F'(x)} = -3 \times e^{-x} + (1-3x) \times (-1) \times e^{-x} + 2 = (-3 - 1 + 3x)e^{-x} + 2 \boldsymbol{= (-3x+7)e^{-x} = f(x)}$.

5) a) La fonction f est convexe lorsque $f''(x) \geq 0$.

Or $f''(x) = (3x - 10)e^{-x}$; comme $e^{-x} > 0$, alors le signe de $f''(x)$ dépend de celui de $3x - 10$.
D'où :

x	0		$\frac{10}{3}$		4
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Par conséquent, **f est convexe sur $\left[\frac{10}{3} ; 4\right]$**.

b) D'après la question précédente, la fonction f change de convexité en $x = \frac{10}{3}$.
Par conséquent, **la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f possède un point d'inflexion d'abscisse $\frac{10}{3}$**.