CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 5	
Elasticité	***Pour le 6 janvier 2020***

Exercice n° 97 page 85

1) a) On a : $f = u \times e^v$ avec $u(x) = x + 10$ et $v(x) = -0,6x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

D'où : $f' = u' \times e^v + u \times \left(e^v\right)' = u' \times e^v + u \times v' \times e^v$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -0,6$.

Par suite,

$$\boldsymbol{f'(x)} = 1 \times e^{-0,6x} + (x+10) \times (-0,6) \times e^{-0,6x} = \left(1 - 0,6(x+10)\right)e^{-0,6x} = \boldsymbol{(-0,6x-5)e^{-0,6x}}.$$

Comme $e^{-0,6x} > 0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(-0,6x-5)$.

Or $-0,6x - 5 = 0$ équivaut à $-0,6x = 5$, ou encore à $x = \dfrac{5}{-0,6} = -\dfrac{50}{6} = -\dfrac{25}{3}$.

On en déduit que :

x	$-\infty$		$-\dfrac{25}{3}$		$+\infty$
$-0,6x-5$		$+$	0	$-$	

Comme $[7\ ;\ 20] \subset \left[-\dfrac{25}{3}; +\infty\right[$, alors $f'(x) < 0$ pour tout x de $[7\ ;\ 20]$.

Par conséquent, **f est strictement décroissante sur $[7\ ;\ 20]$**.

b) **L'évolution de la demande diminue lorsque le prix du téléviseur augmente**.

2) a) $f(9) = (9+10)e^{-0,6\times 9} \approx 0,086$ et $0,086 \times 1000 = 86$; donc **la demande est de 86 téléviseurs lorsque le prix est affiché à 900 €**.

b) Si le prix du téléviseur augmente de 1 %, son nouveau prix est égal à :

$900 \times \left(1 + \dfrac{1}{100}\right) = 909$ euros.

$f(9,09) = (9,09+10)e^{-0,6\times 9,09} \approx 0,082$ et $0,082 \times 1000 = 82$.

Donc **la demande est de 82 téléviseurs lorsque le prix augmente de 1 %**.

Or $\dfrac{82-86}{86} \times 100 \approx 4,65$; par conséquent, **la demande diminue de 4,65 % lorsque le prix du téléviseur augmente de 1 %**.

3) a) $\boldsymbol{E(x)} = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \times x = \dfrac{(-0,6x-5)e^{-0,6x}}{(x+10)e^{-0,6x}} \times x = \dfrac{(-0,6x-5) \times x}{x+10} = \boldsymbol{\dfrac{-0,6x^2 - 5x}{x+10}}$.

b)

x	0		$+\infty$
x	0	$+$	
$-0,6x-5$		$-$	
$x+10$		$+$	
$E(x)$	0	$-$	

Par conséquent, **$E(x)$ est négative sur $[0\,;+\infty[$**.

Le pourcentage de variation de la demande par rapport à la demande initiale est toujours négatif.

c) On a : $E=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=-0,6x^2-5x$ et $v(x)=x+10$.

E est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$.

D'où : $E'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x)=-1,2x-5$ et $v'(x)=1$.

$$E'(x)=\frac{(-1,2x-5)\times(x+10)-(-0,6x^2-5x)\times 1}{(x+10)^2}=\frac{-1,2x^2-12x-5x-50+0,6x^2+5x}{(x+10)^2}$$

$$E'(x)=\frac{-0,6x^2-12x-50}{(x+10)^2}$$

Comme $(x+10)^2>0$, alors le signe de $E'(x)$ dépend de celui de $-0,6x^2-12x-50$.

Or pour tout réel x positif, $-0,6x^2\leq 0$, $-12x\leq 0$, $-50<0$; d'où $-0,6x^2-12x-50<0$ pour tout réel x positif.

Par conséquent, **la fonction E est strictement décroissante sur $[7\ ;\ 20]$**.

d) La fonction E est continue et strictement décroissante sur $[7\ ;\ 20]$.

$E(7)\approx -3,8$ et $E(20)\approx -11,3$; d'où $E(20)<-5,5<E(7)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'**équation $E(x)=-5,5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[7\ ;\ 20]$**.

$E(x)=-5,5$ équivaut à $\dfrac{-0,6x^2-5x}{x+10}=-5,5$, c'est-à-dire à $-0,6x^2-5x=-5,5(x+10)$, ou encore à $-0,6x^2-5x=-5,5x-55$.

Or $-0,6x^2-5x=-5,5x-55$ équivaut à $-0,6x^2-5x+5,5x+55=0$, c'est-à-dire à $-0,6x^2+0,5x+55=0$

$\Delta=b^2-4ac=(0,5)^2-4\times(-0,6)\times 55=132,25$.

Comme $\Delta>0$, alors l'équation $-0,6x^2+0,5x+55=0$ admet deux racines :

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-0,5-\sqrt{132,5}}{-1,2}=\frac{-0,5-11,5}{-1,2}=10 \text{ et } \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-0,5+11,5}{-1,2}=-\frac{11}{1,2}.$$

Or $-\dfrac{11}{1,2}\notin[7\ ;\ 20]$ et $10\in[7\ ;\ 20]$, donc **10 est la solution de l'équation $E(x)=-5,5$ dans l'intervalle $[7\ ;\ 20]$**.

e) D'après la question précédente, $E(10)=-5,5$; donc **lorsque le prix du téléviseur passe de 1 000 € à 1 010 €, la demande baisse de 5,5 %**.