CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 4

Dérivation	*Pour le 8 octobre 2019*

Exercice n° 62 page 50

1) On a : $f = u \times v$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $v(x) = e^x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
D'où : $f' = u' \times v + u \times v'$ avec $u'(x) = 2x + 1$ et $v'(x) = e^x$.
Par suite, $f'(x) = (2x+1) \times e^x + (x^2 + x + 1) \times e^x = (2x + 1 + x^2 + x + 1)e^x = (x^2 + 3x + 2)e^x$.

Factorisons l'expression $x^2 + 3x + 2$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$.
Comme $\Delta > 0$, alors l'expression $x^2 + 3x + 2$ admet deux racines :
$\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - \sqrt{1}}{2} = -2$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1$.
On en déduit que : $x^2 + 3x + 2 = 1 \times (x - (-2))(x - (-1)) = (x+2)(x+1)$.
Par conséquent, **pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)(x+1)e^x$**.

2)

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;-2]$ et sur $[-1;+\infty[$, et décroissante sur $[-2\,;-1]$.

3) La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation :
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Or $f'(1) = (1+2)(1+1)e^1 = 6e$ et $f(1) = (1^2 + 1 + 1)e^1 = 3e$; d'où $y = 6e(x-1) + 3e$.
Donc la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation :
$\boldsymbol{y = 6ex - 3e}$.

Pour déterminer l'abscisse du point d'intersection de cette droite et de l'axe des abscisses, on est amené à résoudre l'équation $6ex - 3e = 0$.
Or $6ex - 3e = 0$ équivaut à $6ex = 3e$, c'est-à-dire $x = \dfrac{3e}{6e} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.
Par conséquent, **cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 0,5**.

Exercice n° 78 page 81

1) $\boldsymbol{f(-2)} = (-3)e^{-2} + 2 \approx \mathbf{1{,}59}$; $\boldsymbol{f(0)} = (-1)e^0 + 2 = \mathbf{1}$; $\boldsymbol{f(2)} = e^2 + 2 \approx \mathbf{9{,}39}$.

2) On a : $f = u \times v + 2$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = e^x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

D'où : $f' = u' \times v + u \times v' + 0$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.

Par suite, $\boldsymbol{f'(x)} = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x = (1 + x - 1)e^x = \boldsymbol{xe^x}$.

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de x.

On en déduit que :

x	-2		0		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$f(-2)$	↘	1	↗	$f(2)$

3) Cherchons une équation de la droite (AB) de la forme $y = mx + p$.

p est l'ordonnée à l'origine ; d'où $p = 2 - e$. $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2 - e - 2}{0 - 1} = e$.

Par conséquent, (AB) a une équation de la forme $y = ex + 2 - e$.

La tangente à la courbe représentative de f au point A a pour équation :
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Or $f'(1) = 1e^1 = e$ et $f(1) = 2$; d'où $y = e(x-1) + 2$.

Donc la tangente à la courbe représentative de f au point A a pour équation : $y = ex + 2 - e$.

On peut donc dire que **la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A**.