CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 3	
Dérivation	***Pour le 12 novembre 2019***

Exercice 1

1) $f'(-0{,}5)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-0{,}5$; comme cette tangente est horizontale, alors $\boldsymbol{f'(-0{,}5)=0}$.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 ; on en déduit que $\boldsymbol{f'(1)}=\dfrac{1-3}{1-0}\boldsymbol{=-2}$.

2) a) $\boldsymbol{f'(-2)\geq 0}$; en effet, $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2 et cette droite a une pente positive.

b) $\boldsymbol{f'(-5)\geq f'(1)}$; en effet, $f'(-5)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -5 et cette droite a une pente positive, alors que $f'(1)<0$.

c) $\boldsymbol{f'(0)\leq f'(8)}$.

Exercice 2

Partie A

1) Pour tout réel x, $C'(x)=3x^{3-1}+12\times 2x^{2-1}+21=3x^2+24x+21$.

Par suite, $\boldsymbol{C'(4)}=3\times 4^2+24\times 3+21=48+72+21\boldsymbol{=141}$ et

$\boldsymbol{C'(6)}=3\times 6^2+24\times 6+21=108+144+21\boldsymbol{=273}$.

2) Etudions le signe de $3x^2+24x+21$: $3x^2+24x+21=3\left(x^2+8x+7\right)$.

$\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times 1\times 7=64-28=36$.

Comme $\Delta>0$, l'expression du second degré x^2+8x+7 a deux racines :

$\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-8-\sqrt{36}}{2}=\dfrac{-14}{2}=-7$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-8+6}{2}=-1$.

On en déduit le signe de x^2+8x+7 sur $\mathbb{R}$:

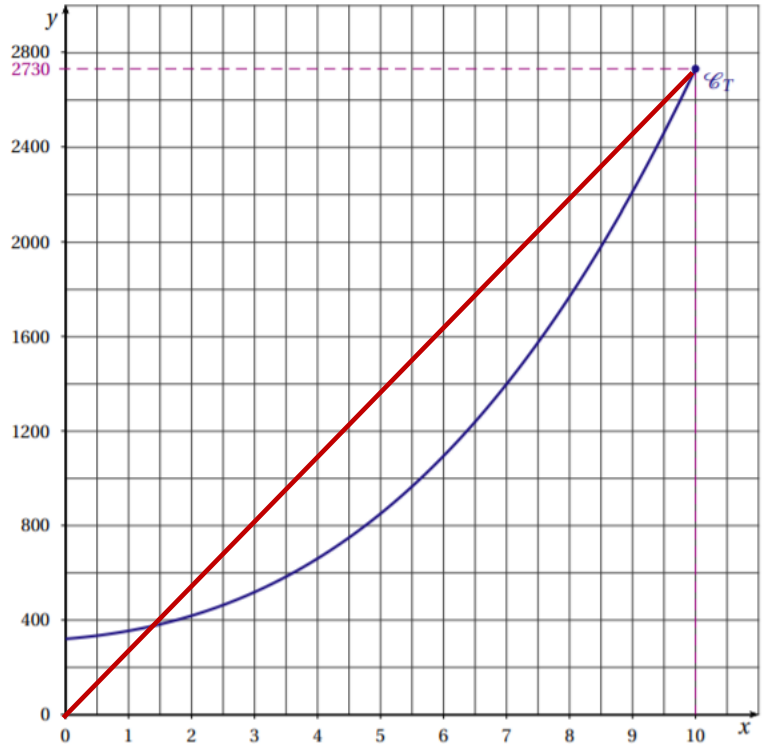
x	$-\infty$		-7		-1		$+\infty$
x^2+8x+7		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or l'intervalle $[0\ ;10]$ est inclus dans $]-1\ ;+\infty[$. Par conséquent, $x^2+8x+7>0$ pour tout x de $[0\ ;10]$.

Donc **la fonction C est strictement croissante sur $[0\ ;10]$**.

Partie B

1) b) **Le bénéfice semble être maximal lorsqu'on produit environ 6 000 articles**.



2) a) $B(6)=R(6)-C(6)=544$; **si l'entreprise fabrique et vend 6 000 articles un mois donné, le bénéfice réalisé sera de 544 000 euros**.

b) $B(x)=R(x)-C(x)=273x-\left(x^3+12x^2+21x+320\right)=-x^3-12x^2+252x-320$.

Pour tout x de $[0\,;10]$, $B'(x)=-3x^{3-1}-12\times 2x+252=-3x^2-24x+252$.

c) $B'(x)=-3x^2-24x+252=3\left(-x^2-8x+84\right)$.

Etudions le signe de $-x^2-8x+84$: $\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times(-1)\times 84=64+336=400$.

Comme $\Delta>0$, l'expression du second degré $-x^2-8x+84$ a deux racines :

$\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{8-\sqrt{400}}{-2}=\dfrac{-12}{-2}=6$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{8+20}{-2}=-14$.

On en déduit le signe de $-x^2-8x+84$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-14		6		$+\infty$
$-x^2-8x+84$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations :

x	0		6		10
B	-320	↗	544	↘	0

c) **Il faut fabriquer et vendre chaque mois 6 000 articles pour obtenir un bénéfice maximal, qui sera de 544 000 euros**.

Partie C

1) $f(x)=\dfrac{x^3+12x^2+21x+320}{x}$.

On a : $f=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=x^3+12x^2+21x+320$ et $v(x)=x$.

D'où : $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x)=3x^2+24x+21$ et $v'(x)=1$. Alors :

$$f'(x)=\frac{(3x^2+24x+21)\times x-(x^3+12x^2+21x+320)\times 1}{x^2}=\frac{3x^3+24x^2+21x-x^3-12x^2-21x-320}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+12x^2-320}{x^2}.$$

Or $(x-4)(2x^2+20x+80)=2x^3+20x^2+80x-8x^2-80x-320=2x^3+12x^2-320$.

Par conséquent, $\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{(x-4)(2x^2+20x+80)}{x^2}}$, **pour tout réel x de $[0\,;10]$**.

2) Cherchons le signe de $2x^2+20x+80$: $\Delta=b^2-4ac=20^2-4\times 2\times 80=400-640=-240$.
Comme $\Delta<0$, l'expression du second degré $2x^2+20x+80$ a le même signe que $a=2$.
Par suite, $2x^2+20x+80>0$ pour tout réel x. De même, $x^2>0$ pour tout x de $]0\,;10]$.
On en déduit que le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(x-4)$.

x	0		4		10
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Par conséquent, **f est strictement décroissante sur $]0\,;4]$ et strictement croissante sur $[4\,;10]$**.

3) Le coût moyen de production minimal est obtenu pour une production mensuelle de 4 000 articles et $f(4)=165$.
Par conséquent, **l'entreprise ne fait aucun bénéfice si le prix de vente d'un article est inférieur à 165 euros**.