**1.** ***a.*** $5\text{ A} - 3\text{ B} = 5(3n+7) - 3(5n+2) = 35 - 6 = 29$
$d$ divise A et B donc $d$ divise $5\text{ A} - 3\text{ B}$ donc $d$ divise 29, or $d > 0$ donc $d = 1$ ou $d = 29$.

**1.** ***b.*** Si $d = 29$ alors 29 divise A et 29 divise B donc B est un multiple de 29
Si B est un multiple de 29, alors 29 divise $d$ or $d = 1$ ou $d = 29$ donc $d = 29$.

**2.** ***a.*** $6 \times 5 = 30$ donc $29 \times (-1) - (-6) \times 5 = 1$ donc $29 \times (-2) - (-12) \times 5 = 2$.
$(-2\,;-12)$ est une solution de (E).

**2.** ***b.*** $\begin{cases} 29x - 5y = 2 \\ 29 \times (-2) - 5 \times (-12) = 2 \end{cases}$ donc par différence termes à termes : $29(x+2) - 5(y+12) = 0$ soit $29(x+2) = 5(y+12)$
29 divise $5(y+12)$ et 5 et 29 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 29 divise $y + 12$ donc il existe un entier relatif $k$ tel que $y + 12 = 29k$
En remplaçant $y + 12$ par $29k$ dans $29(x+2) = 5(y+12)$, on en déduit que $x + 2 = 5k$
Si $x$ et $y$ sont solutions de (E) alors $x = 5k - 2$ et $y = 29k - 12$, $k \in \mathbb{Z}$

Réciproque
Si $x = 5k - 2$ et $y = 29k - 12$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $29x - 5y = 29(5k-2) - 5(29k-12)$ donc $29x - 5y = -58 + 60 = 2$
donc $x$ et $y$ sont solutions de (E) d'où l'équivalence :
$x$ et $y$ sont solutions de (E) $\Leftrightarrow$ il existe un entier relatif $k$ tel que $x = 5k - 2$ et $y = 29k - 12$.

**2.** ***c.*** Si $d \neq 1$ alors $d = 29$ donc 29 divise B donc il existe un entier $q$ tel que $29q = 5n + 2$ soit $29q - 5n = 2$
D'après la question précédente, il existe un entier relatif $k$ tel que $n = 29k - 12$.

**2.** ***d.*** Si $d \neq 1$, il existe un entier relatif $k$ tel que $n = 29k - 12$, donc $\text{A} = 3(29k - 12) + 7 = 29(3k - 1)$ et $\text{B} = 29(5k - 2)$
On cherche A et B dans $\mathbb{N}$ donc $3k - 1 \geq 0$ et $5k - 2 \geq 0$ soit $k \geq 1$
Les trois plus petits couples (A,B) dans $\mathbb{N}^2$ tels que $d \neq 1$, s'obtiennent pour $k = 1$ ou 2 ou 3

| $k$ | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 58 | 87 |
| 2 | 145 | 232 |
| 3 | 232 | 377 |

Soit les couples (58 ; 87) (145 ; 232) (232 ; 377)