CORRECTION DE L'EXERCICE DE SPÉCIALITÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 9

Suites de matrices	**Le 15 mai 2019**

Amérique du Nord, juin 2018

Partie A : un modèle simple

1) a) La matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n est $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1{,}1 & -2\,000 \\ 2 \times 10^{-5} & 0{,}6 \end{pmatrix}}$.

D'après l'énoncé, $\boldsymbol{U_0 = \begin{pmatrix} 2 \times 10^6 \\ 120 \end{pmatrix}}$.

b) Comme $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n, alors pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.
Le premier juillet de l'année 2019, c'est-à-dire $2012 + 7$, l'estimation est donc contenue dans la matrice U_7. Calculons $U_7 = A^7 \times U_0$ à l'aide de la calculatrice.

$U_7 \approx \begin{pmatrix} 1877647{,}24 \\ 95{,}529448 \end{pmatrix}$. Par suite, **au 1er juillet 2019, il devrait y avoir 96 renards et 1 877 647 campagnols**.

2) a) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n supérieur ou égal à 0, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$ »

→ *Initialisation* : $P \times D^0 \times P^{-1} \times U_0 = P \times I_2 \times P^{-1} \times U_0 = I_2 \times U_0 = U_0$. Par suite, on a $\mathcal{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 01$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.
$U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0 = A \times A^n \times U_0 = PDP^{-1} \times P \times D^n \times P^{-1} \times U_0 = PDD^nP^{-1} \times U_0 = PD^{n+1}P^{-1} \times U_0$.
On en déduit que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

On a alors prouvé :

$\mathcal{P}(0)$ et pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$.

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout entier naturel n, $U_n = PD^nP^{-1} \times U_0$**.

b) Comme la matrice D est diagonale, alors on a $\boldsymbol{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix}}$**, pour tout n de N**.

c) On admet que, pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_n = \dfrac{2{,}8 \times 10^7 + 2 \times 10^6 \times (0{,}7)^n}{15} \\ v_n = \dfrac{1\,400 + 400 \times (0{,}7)^n}{15} \end{cases}$.

Comme $-1 < 0{,}7 < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}7)^n = 0$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2{,}8 \times 10^7}{15}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1\,400}{15}$ (par somme et quotient de limites).

Or $\dfrac{2{,}8\times10^7}{15}\approx 1\,866\,667$ et $\dfrac{1\,400}{15}\approx 93$; par conséquent, **les populations vont tendre et se stabiliser vers : 93 renards et environ 1 866 667 campagnols**.

Partie B : Étude d'un cas particulier

1) **Dans la cellule B4, on écrit : =1,1*B3 - 0,001*B3*C3**.
Dans la cellule C4, on écrit : = 2*10ˆ(-7)*B3*C3 + 0,6*C3.

2) **On constate la baisse des renards et la hausse des campagnols en 2021**.

Partie C : Étude d'un cas particulier

Résolvons le système $\begin{cases} u_{n+1}=u_n \\ v_{n+1}=v_n \end{cases}$.

$\begin{cases} u_{n+1}=u_n \\ v_{n+1}=v_n \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 1{,}1u_n-0{,}001u_n\times v_n=u_n \\ 2\times10^{-7}u_n\times v_n+0{,}6v_n=v_n \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} 0{,}1u_n-0{,}001u_n\times v_n=0 \\ 2\times10^{-7}u_n\times v_n-0{,}4v_n=0 \end{cases}$,

ou encore à $\begin{cases} 0{,}1u_n\left(1-10^{-2}v_n\right)=0 \\ 0{,}4v_n\left(0{,}5\times10^{-6}u_n-1\right)=0 \end{cases}$.

Par suite, $\begin{cases} u_{n+1}=u_n \\ v_{n+1}=v_n \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} u_n=0 \text{ ou } v_n=100 \\ u_n=2\times10^6 \text{ ou } v_n=0 \end{cases}$.

Les populations initiales ne sont pas nulles ; il est donc possible de donner à u_0 et v_0 des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, **ces valeurs sont : $u_0=2\,000\,000$ et $v_0=100$**.