CORRECTION DE L'EXERCICE DE SPECIALITE DU BAC BLANC	
Suites	***Le 21 février 2008***

Antilles, juin 2005

1) **L'accroissement de la population pendant la première année est** :

$$P_1 - P_0 = 60\ 000 - 40\ 000 = \mathbf{20\ 000}.$$

L'accroissement de la population pendant la deuxième année est :

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}(P_1 - P_0) = \frac{1}{2} \times 20\ 000 = \mathbf{10\ 000}.$$

L'accroissement de la population pendant la troisième année est :

$$P_3 - P_2 = \frac{1}{2}(P_2 - P_1) = \frac{1}{2} \times 10\ 000 = \mathbf{5\ 000}.$$

Comme $P_2 - P_1 = 10\ 000$, alors $\boldsymbol{P_2} = 10\ 000 + P_1 = 10\ 000 + 60\ 000 = \mathbf{70\ 000}$.

Comme $P_3 - P_2 = 5\ 000$, alors $\boldsymbol{P_3} = 5\ 000 + P_2 = 5\ 000 + 70\ 000 = \mathbf{75\ 000}$.

2) a) $U_{n+1} = P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n) = \frac{1}{2}U_n$ pour tout entier naturel *n*.

De plus, $U_0 = P_1 - P_0 = 20\ 000$.

Par conséquent, **la suite (U_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $U_0 = 20\ 000$**.

On en déduit que, pour tout entier naturel *n*, $\boldsymbol{U_n = 20\ 000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

b) $V_{n+1} - V_n = \left(P_{n+2} - \frac{1}{2}P_{n+1}\right) - \left(P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n\right) = (P_{n+2} - P_{n+1}) - \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n) = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$.

D'où, d'après la question précédente : pour tout entier naturel *n*,

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n = 20\ 000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2} \times 20\ 000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 20\ 000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 20\ 000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$$

On en déduit que **la suite (V_n) est constante**.

Par conséquent, **pour tout *n*, on a : $\boldsymbol{V_n = V_0 = P_1 - \frac{1}{2}P_0}$**.

Donc, **pour tout *n*, on a : $\boldsymbol{V_n}$** $= 60\ 000 - \frac{1}{2} \times 40\ 000 = \mathbf{40\ 000}$.

c) En faisant la soustraction des égalités $U_n = P_{n+1} - P_n$ et $V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n$, on obtient :

$$U_n - V_n = (P_{n+1} - P_n) - \left(P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n\right) = -P_n + \frac{1}{2}P_n = -\frac{1}{2}P_n.$$

D'où : $\boldsymbol{P_n} = -2(U_n - V_n) = \mathbf{2(V_n - U_n)}$**, pour tout entier naturel *n*.**

D'après les questions 2) a) et 2) b), on en déduit que, **pour tout entier naturel *n***,

$\boldsymbol{P_n} = 2\left(40\ 000 - 20\ 000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \mathbf{40\,000} \times \left(\mathbf{2} - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}}\right)$.

d) Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$; d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{P_n} = \mathbf{80\ 000}$, et **la suite** $(\boldsymbol{P_n})$ **converge alors vers 80 000**.

On en déduit que le nombre de libellules s'approchera de 80 000 (et ne dépassera pas ce nombre) au bout d'un nombre d'années suffisamment grand.