

## DEVOIR MAISON N° 9

*Probabilités et suites*

*Pour le 5 mars 2008*

Julie possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel elle a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieuse de bien gérer ses dépenses, elle étudie l'évolution de ses consommations.

Elle a constaté que :

- Si pendant le mois noté  $n$  elle a dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant noté  $(n + 1)$  est  $\frac{1}{5}$ .
- Si pendant le mois noté  $n$  elle n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant est  $\frac{2}{5}$ .

Pour  $n$  entier naturel strictement positif, on désigne par  $A_n$  l'événement « Julie a dépassé son forfait le mois  $n$  » et par  $B_n$  l'événement contraire.

On pose  $p_n = p(A_n)$  et  $q_n = p(B_n)$  ; on a  $p_1 = \frac{1}{2}$ .

*Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

1) a) Donner les probabilités de  $A_{n+1}$  sachant que  $A_n$  est réalisé et de  $A_{n+1}$  sachant que  $B_n$  est réalisé.

b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, les égalités suivantes sont vraies :

$$p(A_{n+1} \cap A_n) = \frac{1}{5} p_n \text{ et } p(A_{n+1} \cap B_n) = \frac{2}{5} q_n.$$

En déduire que l'égalité suivante est vraie :  $p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} p_n$ .

2) Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose :  $u_n = p_n - \frac{1}{3}$ .

Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme  $u_1$ .

3) Écrire  $u_n$ , puis  $p_n$  en fonction de  $n$ . Déterminer la limite de  $(p_n)$ .