CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 8

Suites	**Pour le 13 février 2008**

Exercice donné au BAC, lors de la session de juin 2002, en Asie

1)

	Janvier 2002	Février 2002	Mars 2002
Rang du mois	0	1	2
Recette	2300	**2323**	**2346,23**
Coûts	800	**820**	**840,5**
Bénéfice	1500	**1503**	**1505,73**

- *Février 2002* : $2300\times\left(1+\frac{1}{100}\right)=2323$; $800\times\left(1+\frac{2,5}{100}\right)=820$; $2323-820=1503$.
- *Mars 2002* : $2323\times\left(1+\frac{1}{100}\right)=2346,23$; $820\times\left(1+\frac{2,5}{100}\right)=840,5$;
$2346,23-8405=1505,73$.

2) a) Comme la recette augmente de 1 % tous les mois, alors $R_{n+1}=R_n\times\left(1+\frac{1}{100}\right)=1,01\,R_n$,

pour tout entier naturel *n*.
On en déduit que la suite (R_n) est une suite géométrique de raison $1,01$.

Par conséquent, **pour tout entier naturel *n*,** $\boldsymbol{R_n}=R_0\times(1,01)^n=\mathbf{2300\times(1,01)^{\boldsymbol{n}}}$.

Comme les coûts augmentent de 2,5 % tous les mois, alors $C_{n+1}=C_n\times\left(1+\frac{2,5}{100}\right)=1,025\,C_n$,

pour tout entier naturel *n*.
On en déduit que la suite (C_n) est une suite géométrique de raison $1,025$.

Par conséquent, **pour tout entier naturel *n*,** $\boldsymbol{C_n}=C_0\times(1,025)^n=\mathbf{800\times(1,025)^{\boldsymbol{n}}}$.

b) On en déduit que :
$\boldsymbol{B_n}=R_n-C_n=\mathbf{2300\times(1,01)^{\boldsymbol{n}}-800\times(1,025)^{\boldsymbol{n}}}$, **pour tout entier naturel *n*.**

3) a) Soit n un entier naturel.

$$B_{n+1}-B_n=\left(2300(1,01)^{n+1}-800(1,025)^{n+1}\right)-\left(2300(1,01)^n-800(1,025)^n\right)$$

$$B_{n+1}-B_n=\left(2300(1,01)^{n+1}-2300(1,01)^n\right)-\left(800(1,025)^{n+1}-800(1,025)^n\right)$$

$$B_{n+1}-B_n=2300\left((1,01)^{n+1}-(1,01)^n\right)-800\left((1,025)^{n+1}-(1,025)^n\right)$$

$$B_{n+1}-B_n=2300\left((1,01)^n\times(1,01)-(1,01)^n\right)-800\left((1,025)^n\times(1,025)-(1,025)^n\right)$$

C. Lainé

$B_{n+1} - B_n = 2300(1{,}01)^n\,(1{,}01-1) - 800(1{,}025)^n\,(1{,}025-1)$

Par conséquent, **pour tout entier naturel n, $B_{n+1} - B_n = 23(1{,}01)^n - 20(1{,}025)^n$**.

b) $23(1{,}01)^n - 20(1{,}025)^n > 0 \iff 23(1{,}01)^n > 20(1{,}025)^n$

$23(1{,}01)^n - 20(1{,}025)^n > 0 \iff 23 > 20\dfrac{(1{,}025)^n}{(1{,}01)^n}$ car $(1{,}01)^n > 0$ pour tout n entier naturel

$23(1{,}01)^n - 20(1{,}025)^n > 0 \iff \dfrac{23}{20} > \dfrac{(1{,}025)^n}{(1{,}01)^n}$ car $20 > 0$.

Par conséquent, $23(1{,}01)^n - 20(1{,}025)^n$ **> 0 équivaut à $\left(\dfrac{1{,}025}{1{,}01}\right)^n < \dfrac{23}{20}$**

On en déduit que : $B_{n+1} - B_n > 0$ équivaut à $\left(\dfrac{1{,}025}{1{,}01}\right)^n < \dfrac{23}{20}$.

Or la fonction ln est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, d'où :

$$\left(\frac{1{,}025}{1{,}01}\right)^n < \frac{23}{20} \iff \ln\left(\left(\frac{1{,}025}{1{,}01}\right)^n\right) < \ln\left(\frac{23}{20}\right)$$

$$\left(\frac{1{,}025}{1{,}01}\right)^n < \frac{23}{20} \iff n\ln\left(\frac{1{,}025}{1{,}01}\right) < \ln\left(\frac{23}{20}\right)$$

$$\left(\frac{1{,}025}{1{,}01}\right)^n < \frac{23}{20} \iff n < \frac{\ln\left(\frac{23}{20}\right)}{\ln\left(\frac{1{,}025}{1{,}01}\right)} \quad \text{car } \ln\left(\frac{1{,}025}{1{,}01}\right) > 0$$

Comme n est un entier naturel, alors **l'inégalité $B_{n+1} - B_n > 0$ est vérifiée pour les valeurs de n inférieures ou égales à 9**.

On en déduit que **la suite (B_n) est croissante jusqu'au rang 9.**

4) D'après la question précédente, **le bénéfice de cet artisan diminuera à partir du rang 11, c'est-à-dire à partir du mois de novembre 2002**.

C. Lainé