

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 7

Graphes

Pour le 30 janvier 2008

Exercice donné au BAC, lors de la session de juin 2004, en Amérique du Nord

PARTIE A

1) a) La matrice associée au graphe G_1 est $N =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons $N^2 =$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$
 comme cette matrice ne contient aucun terme nul, il

est possible de joindre deux sommets quelconques par au moins une chaîne de longueur 2. On en conclut que **ce graphe G_1 est connexe.**

De plus, **il ne possède que deux sommets de degré impair.**

Par conséquent, **le graphe G_1 admet au moins une chaîne eulérienne.**

b) **La chaîne DABCFBEFAE n'est pas une chaîne eulérienne de G_1 car elle ne passe pas par l'arête [AD].**

2) Le graphe ABEF est un graphe complet d'ordre 4, et est un sous-graphe de G_1 ; alors **le nombre chromatique γ de ce graphe est supérieur ou égal à 4.**

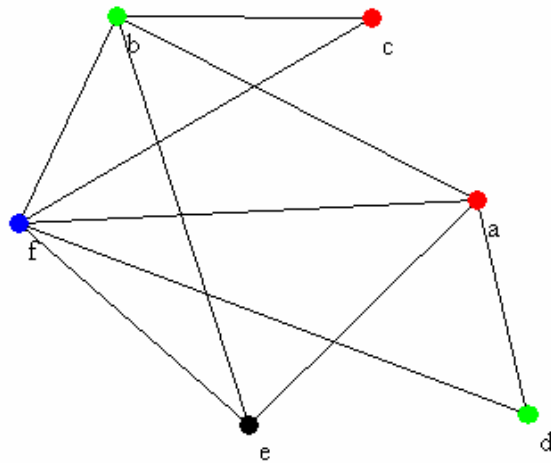
3) Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $D+1$, où D est le plus grand degré des sommets de ce graphe. Or ici, $D=5$.

Par conséquent, **le nombre chromatique γ de ce graphe est inférieur ou égal à 6.**

4)

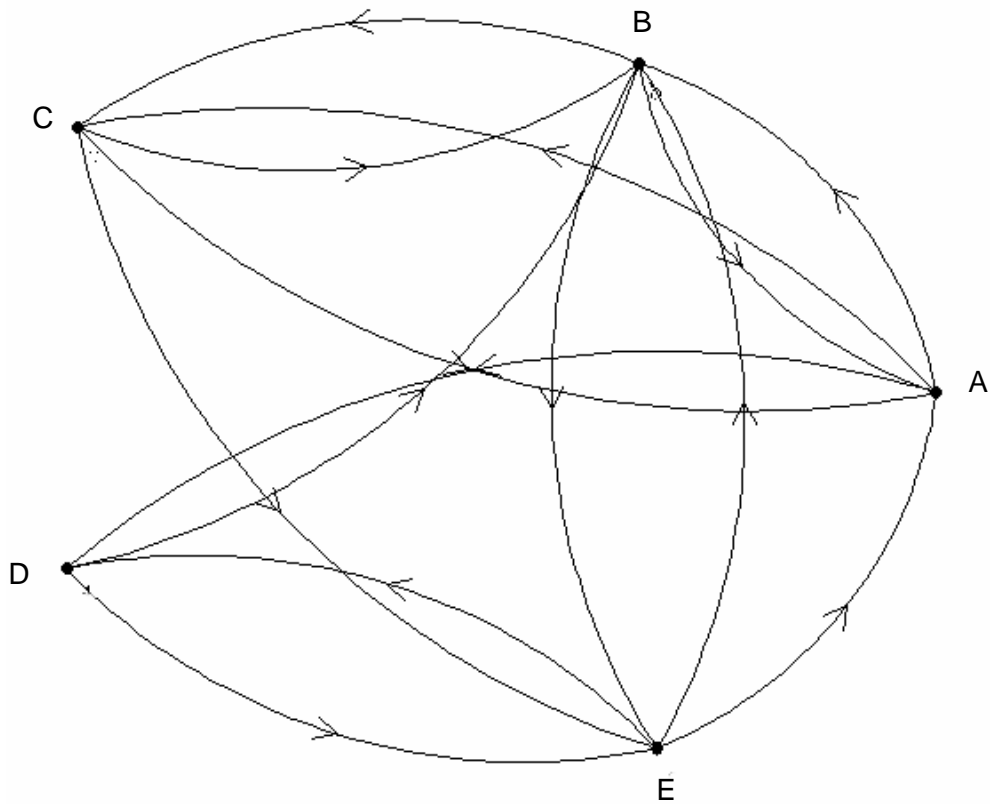
Sommets	F	A	B	E	C	D
Degré	5	4	4	3	2	2
Numéro de couleur	1	2	3	4	2	3

Donc **le nombre chromatique de ce graphe est 4.**



PARTIE B

1)



2) Calculons la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Comme le terme $a_{2,4}$ de la matrice M^3 est égal à 3, il y a **trois chaînes de longueur 3** reliant B à D : **B – E – A – D ; B – C – E – D ; B – C – A – D.**