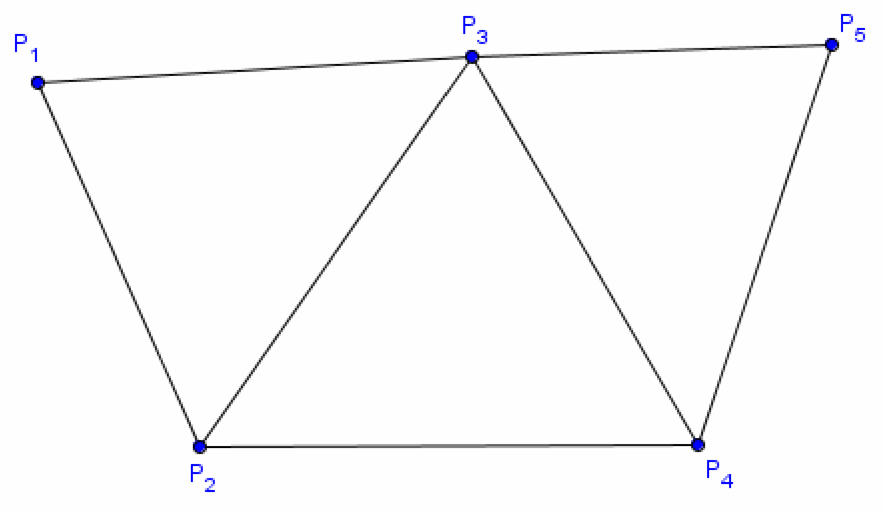
# CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 3

| *Graphes : chaînes et cycles eulériens, graphe connexe et matrice associée à un graphe* | *Pour le 7 novembre 2007* |
|---|---|

**Exercice 1**
Essayons de modéliser les situations par des graphes d'ordre 5 dont les sommets sont les cinq pays et une arête est un passage à la frontière entre deux pays.

1) Comme on souhaite partir d'un pays et arriver à un autre en ayant franchi chaque frontière une fois et une seule, cela revient à chercher une chaîne eulérienne.
Pour cela, il faut d'abord que le graphe soit connexe, c'est-à-dire que chaque paire de pays soit reliée par une chaîne.
De plus, ce graphe doit contenir deux sommets de degré impair, sinon si il y en avait zéro, on reviendrait au pays de départ.. Or le degré maximal d'un sommet est 4, d'où le degré impair maximal d'un sommet est 3.
Donc on pourra partir d'un pays et arriver à un autre en ayant franchi chaque frontière une fois et une seule ; par exemple :



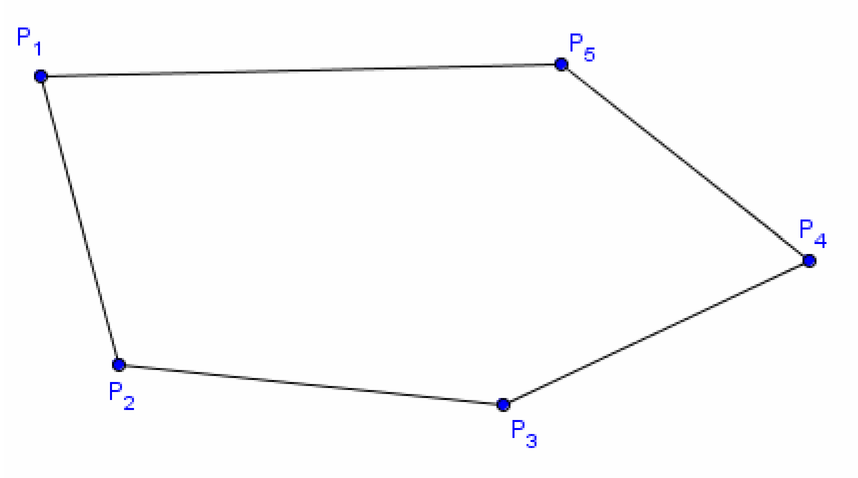

Dans ce cas, il admettrait une chaîne eulérienne entre $P_2$ et $P_4$ .

Par contre, on ne peut pas le faire quelque soit le pays de départ ; il faut que l'on parte d'un pays qui soit considéré comme un sommet d'ordre impair.

2) Comme on souhaite partir d'un pays et y revenir en ayant franchi chaque frontière une fois et une seule, cela revient à chercher un cycle eulérien.
Pour cela, il faut d'abord que le graphe soit connexe, c'est-à-dire que chaque paire de pays soit reliée par une chaîne.
De plus, ce graphe doit contenir zéros sommets de degré impair. De plus, le degré maximal d'un sommet est 4.
On pourra le faire quel que soit le pays de départ.
Par exemple :



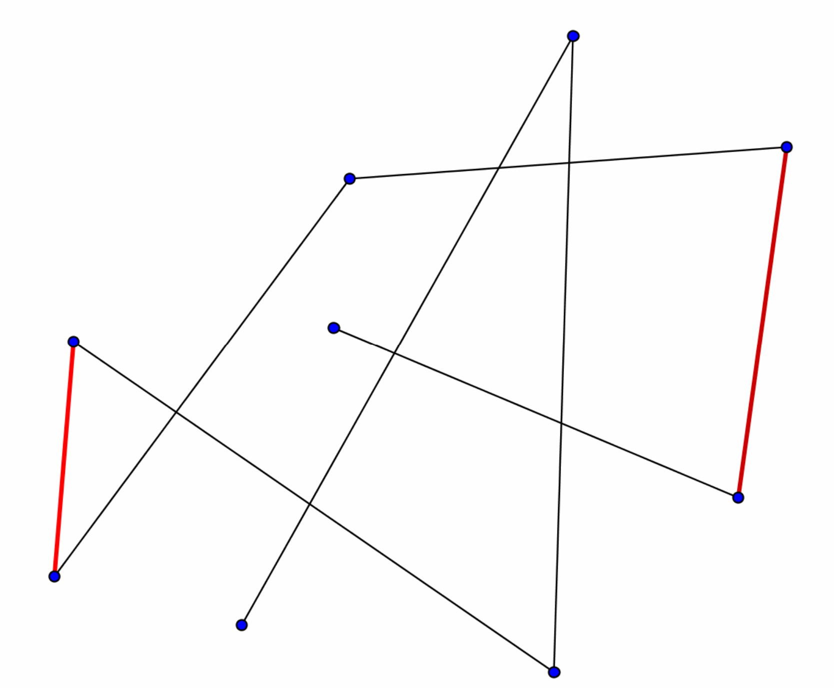
*C. Lainé*




Par contre, on ne peut pas le faire quelque soit le pays de départ ; il faut que l'on parte d'un pays qui soit considéré comme un sommet d'ordre impair.

**Exercice 2**

En rajoutant les deux arêtes rouges, ce graphe deviendra connexe.



**Exercice 3**

1) **La matrice associée au graphe est :** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $M^6 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 19 & 11 & 12 & 9 & 6 & 16 \\ 36 & 28 & 23 & 22 & 18 & 34 \\ 37 & 24 & 25 & 17 & 15 & 31 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 8 & 15 \\ 28 & 22 & 19 & 15 & 15 & 26 \end{pmatrix}$

3) a) Pour savoir combien il y a de chemins de longueur 6 reliant A à A, on regarde le terme (1, 1) de la matrice $M^6$. Or ce terme est 8.
**Il existe donc 8 chemins de longueur 6 reliant A à A**.

b) **Ces 8 chemins sont :**

**A – E – D – A – E – D – A ; A – E – D – F – B – F – A ;**
**A – E – D – F – C – B – A ; A – E – D – F – C – F – A ;**
**A – E – D – F – C – D – A ; A – E – D – C – D – F – A ;**
**A – E – D – C – F – B – A ; A – E – D – C – B – F – A .**

c) Parmi les 8 chemins précédents, il y en a trois qui passent par tous les sommets :
A – E – D – F – C – B – A ; A – E – D – C – F – B – A ; A – E – D – C – B – F – A.
Le temps mis pour le chemin A – E – D – F – C – B – A est de 28 minutes.
Le temps mis pour le chemin A – E – D – C – F – B – A est de 21 minutes.
Le temps mis pour le chemin A – E – D – F – C – B – A est de 28 minutes.

Par conséquent, **parmi ceux qui passent par tous les sommets du graphe, c'est le chemin A – E – D – C – F – B – A qui minimise le temps de parcours**.

**Nous en déduisons que le livreur pourra livrer tous ses clients et revenir à l'entrepôt en 21 minutes**.