CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 11	
Espace	***Pour le 9 avril 2008***

<u>Exercice 1</u>

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1\ ;\ 2\ ;\ 2)$ et le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(1\ ;\ 2\ ;\ 2)$. Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}}$.

b) $x_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{AD}}+y_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{AD}}+z_{\overrightarrow{AB}}\times z_{\overrightarrow{AD}}=1\times2+2\times(-2)+2\times1=0$.

On en déduit que **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux**.

c) $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$;

$AD=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2+(z_D-z_A)^2}=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9}=3$.

Alors $\boldsymbol{AB=AD}$.

d) Comme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme. De plus, d'après la question 1) b), l'angle $\widehat{BAD}$ est droit. D'où $ABCD$ est un rectangle.
Et, d'après la question précédente, deux côtés consécutifs ont la même longueur, donc ***ABCD* est un carré**.

2) a) Le point I, centre de $ABCD$, est le milieu du segment $[AC]$.

D'où : $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{1}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{3+3}{2}=3 \\ z_I=\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{3+6}{2}=\dfrac{9}{2} \end{cases}$. Par conséquent, **$I$ a pour coordonnées $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 3\ ;\ \dfrac{9}{2}\right)}$**.

b) $\overrightarrow{IJ}$ a pour cordonnées $(4\ ;\ 2\ ;\ -4)$.

Comme les points A, B et C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan (ABC) si $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Or $x_{\overrightarrow{IJ}}\times x_{\overrightarrow{AB}}+y_{\overrightarrow{IJ}}\times y_{\overrightarrow{AB}}+z_{\overrightarrow{IJ}}\times z_{\overrightarrow{AB}}=4\times1+2\times2+(-4)\times2=4+4-8=0$; d'où $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

De même, $x_{\overrightarrow{IJ}}\times x_{\overrightarrow{AC}}+y_{\overrightarrow{IJ}}\times y_{\overrightarrow{AC}}+z_{\overrightarrow{IJ}}\times z_{\overrightarrow{AC}}=4\times3+2\times0+(-4)\times3=12+0-12=0$; d'où $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Comme $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, alors **le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan (ABC)**.

c) Comme $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan (ABC), alors (ABC) a une équation de la forme $4x+2y-4z+d=0$.

Or A est un point de (ABC), alors $4x_A+2y_A-4z_A+d=0$, c'est-à-dire $-4+6-12+d=0$; par suite, $d=10$.

Par conséquent, (ABC) a pour équation $\boldsymbol{4x+2y-4z+10=0}$, ou encore $\boldsymbol{2x+y-2z+5=0}$.

3) a) $M(x\ ;y\ ;z)\in(AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=k\ \overrightarrow{AB}$ avec k un réel

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=k \\ y-3=2k \\ z-3=2k \end{cases}$$

Alors **une représentation paramétrique de la droite (AB) est** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1+k} \\ \boldsymbol{y=3+2k} \\ \boldsymbol{z=3+2k} \end{cases}$**, avec k réel**.

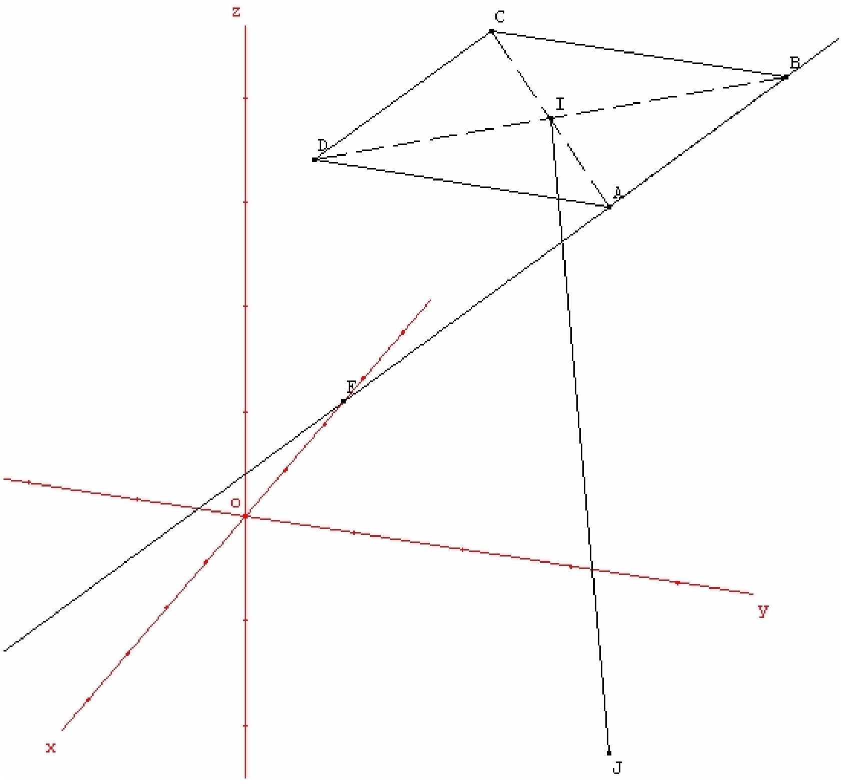
b)

$$M(x\ ;y\ ;z)\in(AB)\cap(Ox) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+k \\ y=3+2k \\ z=3+2k \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+k \\ 3+2k=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{5}{2} \\ k=-\dfrac{3}{2} \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Par conséquent, **la droite (AB) coupe l'axe des abscisses en un point F de coordonnées $\left(-\frac{5}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$**.



<u>Exercice 2</u>

1) a)

$$A(x\ ;y\ ;z)\in(P)\cap(Ox) \iff \begin{cases}2x+2y+3z=6\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}2x=6\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=3\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

Le point A, point d'intersection du plan (P) et de l'axe (Ox), a pour coordonnées $(\mathbf{3}\ ;\ \mathbf{0}\ ;\ \mathbf{0})$.

$$B(x\ ;y\ ;z)\in(P)\cap(Oy) \iff \begin{cases}2x+2y+3z=6\\ x=0\\ z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}2y=6\\ x=0\\ z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}y=3\\ x=0\\ z=0\end{cases}$$

Le point B, point d'intersection du plan (P) et de l'axe (Oy), a pour coordonnées $(\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{3}\ ;\ \mathbf{0})$.

$$C(x\ ;y\ ;z)\in(P)\cap(Oz) \iff \begin{cases}2x+2y+3z=6\\ x=0\\ y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}3z=6\\ x=0\\ y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}z=2\\ x=0\\ y=0\end{cases}$$

Le point C, point d'intersection du plan (P) et de l'axe (Oz), a pour coordonnées $(\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{0}\ ;\ \mathbf{2})$.

b) Le plan (xOy) contient les axes (Ox) et (Oy) ; or ces axes coupent le plan (P) respectivement en A et en B. Comme l'intersection de deux plans sécants est une droite, on en déduit que **l'intersection des plans (P) et (xOy) est la droite (AB)**.

Le plan (xOz) contient les axes (Ox) et (Oz) ; or ces axes coupent le plan (P) respectivement en A et en C. Comme l'intersection de deux plans sécants est une droite, on en déduit que **l'intersection des plans (P) et (xOz) est la droite (AC)**.

Le plan (yOz) contient les axes (Oy) et (Oz) ; or ces axes coupent le plan (P) respectivement en B et en C. Comme l'intersection de deux plans sécants est une droite, on en déduit que **l'intersection des plans (P) et (yOz) est la droite (BC)**.

2) a) Soit $ax + by + cz + d = 0$ une équation de (R).
Comme les points D, E et F appartiennent au plan (R), alors :

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ -4b + d = 0 \\ 4c + d = 0 \end{cases}, \quad \text{c'est-à-dire} \begin{cases} a = -d \\ b = \dfrac{1}{4}d \\ c = -\dfrac{1}{4}d \end{cases}.$$

Prenons $d = -4$; on obtient : $a = 4$, $b = -1$ et $c = 1$.
Par conséquent, **(R) a pour équation $4x - y + z - 4 = 0$**.

b)

$$G(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (P) \cap (Q) \cap (R) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 6 \\ x + 2y = 2 \\ 4x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y \\ 2(2 - 2y) + 2y + 3z = 6 \\ 4(2 - 2y) - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

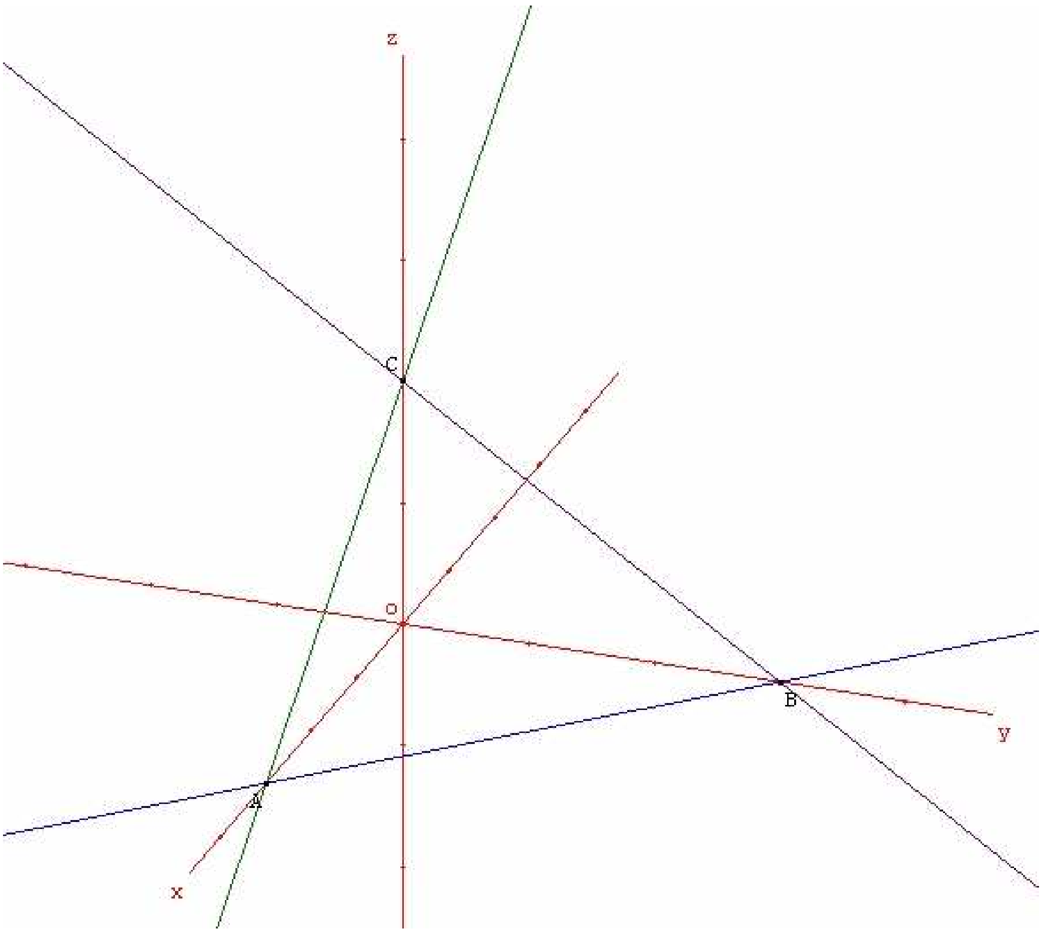
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y \\ -2y + 3z = 2 \\ -9y + z = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = -4 + 9y \\ -2y + 3(-4 + 9y) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = -4 + 9y \\ 25y = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2 \times \dfrac{14}{25} = \dfrac{22}{25} \\ z = -4 + 9 \times \dfrac{14}{25} = \dfrac{26}{25} \\ y = \dfrac{14}{25} \end{cases}$$

Donc, **le point G, intersection des trois plans (P), (Q) et (R), a pour coordonnées $\left(\dfrac{22}{25}\ ;\ \dfrac{14}{25}\ ;\ \dfrac{26}{25}\right)$**.


z
C
O
B
y
A
x