CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 10	
Graphes probabilistes et suites	***Pour le 2 avril 2008***

Exercice donné au BAC, lors de la session de juin 2006, dans les Centres Étrangers

1) a) S'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{1}{3}$, alors $p_B(B)=\frac{1}{3}$, et la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{6}$, alors $p_B(P)=\frac{1}{6}$.

On en déduit que : $p_B(V)=1-p_B(B)-p_B(P)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

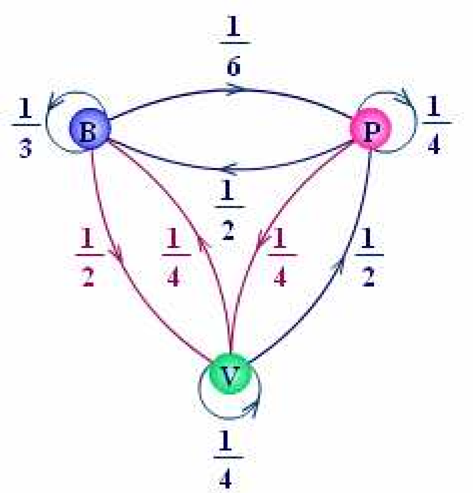
Si le temps est variable, la probabilité qu'il soit variable le lendemain est $\frac{1}{4}$, alors $p_V(V)=\frac{1}{4}$, et la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{2}$, alors $p_V(P)=\frac{1}{2}$.

On en déduit que : $p_V(B)=1-p_V(V)-p_V(P)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

S'il pleut, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est $\frac{1}{4}$, alors $p_P(P)=\frac{1}{4}$, et la probabilité qu'il fasse beau est $\frac{1}{2}$, alors $p_P(B)=\frac{1}{2}$.

On en déduit que : $p_P(V)=1-p_P(P)-p_P(B)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Par conséquent, on peut représenter cette situation par le graphe probabiliste suivant :



b) Les sommets B, V, P étant rangés dans cet ordre, alors **la matrice M de transition de ce graphe est** $M=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

C. Lainé

c) L'état probabiliste dans deux jours est exprimé par la matrice $P_2 = P_0 M^2$.

Or $P_0 M^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{23}{72} & \frac{1}{3} & \frac{25}{72} \\ \frac{19}{48} & \frac{5}{16} & \frac{7}{24} \\ \frac{17}{48} & \frac{3}{8} & \frac{13}{48} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{72} & \frac{1}{3} & \frac{25}{72} \end{pmatrix}$.

Par conséquent, **la probabilité qu'il fasse beau dans deux jours est égale à $\frac{23}{72}$, celle qu'il pleuve dans deux jours est égale à $\frac{25}{72}$ et celle que le temps soit variable dans deux jours est égale à $\frac{1}{3}$.**

2) a) **La matrice de transition T de ce graphe est égale à $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.**

b) Soit $Q = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$.

$\begin{cases} Q = QT \\ x + y = 1 \end{cases}$ équivaut à système $\begin{cases} x + y = 1 \\ x = \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}y \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 0 \end{cases}$, ou encore

$\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 0 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 1 - y \\ \frac{2}{3}(1-y) - \frac{3}{4}y = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} y = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{17}{12}} = \frac{2}{3} \times \frac{12}{17} = \frac{8}{17} \\ x = 1 - y = 1 - \frac{8}{17} = \frac{9}{17} \end{cases}$.

On obtient la solution $\left(\frac{9}{17} ; \frac{8}{17} \right)$.

On utilise le théorème : « **Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l'état P_n à l'étape n converge vers un état $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ indépendant de l'état initial P_0. De plus, P vérifie P = PM telle que $x + y = 1$.** »

L'état stable du système est donc $Q = \left(\frac{9}{17} ; \frac{8}{17} \right)$; ce qui signifie que **pour un entier n très grand (c'est-à-dire à long terme), la probabilité qu'il fasse beau est égale à $\frac{9}{17}$ et celle qu'il ne fasse pas beau est égale à $\frac{8}{17}$.**