DEVOIR MAISON N° 1	
Matrices	***Pour le 10 octobre 2007***

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. N'oubliez pas de souligner (ou d'encadrer) vos résultats.

Exercice 1

Traduire le système $(S)\begin{cases} 3x-2y+z=17 \\ x-3z=-51 \\ 3y+2z=-34 \end{cases}$ par une égalité matricielle de la forme $AX = B$.

À l'aide la calculatrice déterminer la matrice A^{-1} et résoudre le système.

Exercice 2

Soit $M(x\ ;y)$ un point du plan, de coordonnées cartésiennes x et y. On appelle *matrice des coordonnées homogènes du point M* la matrice $M=\begin{pmatrix} x & y & 1\end{pmatrix}$.

Par exemple, la matrice des coordonnées homogènes du point $A(-5\ ;\ 2)$ est $A=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Réciproquement, le point B dont la matrice des coordonnées homogènes est $B=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1\end{pmatrix}$ a pour coordonnées cartésiennes $B(-3\ ;\ -2)$.

1) Donner les matrices des coordonnées homogènes des points $C(5\ ;\ 2)$ et $D(3\ ;\ 6)$.

2) On considère la matrice $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$. On définit une transformation t de la manière suivante :

À tout point $M(x\ ;y)$ du plan on associe le point $M'(x'\ ;y')$ tel que $\begin{pmatrix} x' & y' & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y & 1\end{pmatrix}\times T$ où $\begin{pmatrix} x & y & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' & y' & 1\end{pmatrix}$ sont les matrices des coordonnées homogènes des points M et M'.

a) Calculer les coordonnées cartésiennes des points *A', B', C'* et *D'* images respectives des points *A, B, C* et *D* par la transformation t .

b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, placer les points *A, B, C*, *D* et *A', B', C'*, *D'*. Quelle semble être la transformation t ?

c) Soit $N(a\ ;\ b)$ un point du plan, N' l'image du point N par la transformation t. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{NN'}$. En déduire la nature de la transformation t.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 1

Matrices	*Pour le 10 octobre 2007*

1) **La matrice associée au graphe est :** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) a) Pour savoir combien il y a de chemins de longueur 6 reliant A à A, on regarde le terme (1, 1) de la matrice M^6. Or ce terme est 8.
Il existe donc 8 chemins de longueur 6 reliant A à A.

b) **Ces 8 chemins sont :**

A – E – D – A – E – D – A ; A – E – D – F – B – F – A ;
A – E – D – F – C – B – A ; A – E – D – F – C – F – A ;
A – E – D – F – C – D – A ; A – E – D – C – D – F – A ;
A – E – D – C – F – B – A ; A – E – D – C – B – F – A .

c) Parmi les 8 chemins précédents, il y en a trois qui passent par tous les sommets :
A – E – D – F – C – B – A ; A – E – D – C – F – B – A ; A – E – D – C – B – F – A.
Le temps mis pour le chemin A – E – D – F – C – B – A est de 28 minutes.
Le temps mis pour le chemin A – E – D – C – F – B – A est de 21 minutes.
Le temps mis pour le chemin A – E – D – F – C – B – A est de 28 minutes.

Par conséquent, **parmi ceux qui passent par tous les sommets du graphe, c'est le chemin A – E – D – C – F – B – A qui minimise le temps de parcours**.

Nous en déduisons que le livreur pourra livrer tous ses clients et revenir à l'entrepôt en 21 minutes.

3) Au départ de sa tournée, le livreur a choisi de suivre l'itinéraire le plus rapide, c'est-à-dire le chemin A – E – D – C – F – B – A.
Or lorsqu'il arrive chez C et que celui-ci est absent, il décide de livrer les autres clients et de terminer par C, avant de revenir à l'entrepôt. Il aura donc déjà livré les clients E et D ; il lui reste les clients F, B et C pour terminer son parcours.
Lorsqu'il aura livré tous les clients, il sera en C.
Il y aura alors chemins possibles :
C – B – A : temps de parcours = 9 + 2 = 11 minutes
C – B – F – A : temps de parcours = 9 + 3 + 6 = 18 minutes
C – F – A : temps de parcours = 6 + 6 = 12 minutes
C – F – B – A : temps de parcours = 6 + 3 + 2 = 11 minutes
C – D – A : temps de parcours = 2 + 9 = 11 minutes
C – D – F – A : temps de parcours = 2 + 3 + 6 = 11 minutes
C – D – F – B – A : temps de parcours = 2 + 3 + 3 + 2 = 10 minutes

Par conséquent, **le chemin le plus rapide pour revenir à l'entrepôt A à partir de C est le chemin C – D – F – B – A**.