DE LA PREMIERE A LA TERMINALE SPE MATHS

Le programme de l'épreuve de spécialité de terminale porte sur les programmes de première et de terminale. Certaines questions posées cette année au Bac peuvent être traitées avec les outils de première.

Exercice 1 (*Centres étrangers, sujet 2*)

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.
On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1) On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.
   a) Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   b) Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.

2) On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connaît pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.
   a) Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.
   Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
   b) Résoudre l'inéquation pour x réel : $-x^2+30x-81>0$.
   c) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.
   d) Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

3) On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs).
Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5 € ?

Correction

Exercice 2 (*Asie, sujet 2*)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.
Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8.
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.
On notera :

- *B* l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- *V* l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1) Donner la valeur de $P_B(V)$.
2) Représenter la situation par un arbre pondéré.
3) Montrer que $P(V)=0,6$.
4) Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.
Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.
Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.
La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.
Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.
On appelle :

• Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;
• C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaires de la compagnie aérienne sur ce vol.

On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

1) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.

2) Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.

3) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.

4) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

Correction

Exercice 3 (*Centres étrangers, sujet 1*)

Partie A

Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T_1 et T_2.
On prélève au hasard une paire de verres dans la production.
A est l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T_1 ».
B est l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T_2 ».
On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et B.
Une étude a montré que :

• la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T_1 notée $P(A)$ est égale à 0,1.
• la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T_2 notée $P(B)$ est égale à 0,2.
• la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1) Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			1

2) a) Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T_1 ou T_2.
b) Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T_1 et T_2.
c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
3) Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.
4) Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T_2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T_1.

Correction

Exercice 4 (*Centres étrangers, sujet 1*)

Partie A

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=e^x-x$.

1) Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
2) En déduire que : si a et b sont deux réels tels que $0<a<b$ alors $h(a)-h(b)<0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\ ;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre T et $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et $\mathscr{C}_f$ de même abscisse.

On s'intéresse aux points d'abscisse $\frac{1}{n}$, avec n entier naturel non nul.

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n=\exp\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}-1.$$

2) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

3) a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1}-u_n=h\left(\frac{1}{n+1}\right)-h\left(\frac{1}{n}\right)$, où h est la fonction définie à la partie A.
b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées à 10^{-9} des premiers termes de la suite (u_n).

Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et $\mathscr{C}_f$ semble être inférieur à 10^{-2}.

n	u_n
1	0,718 281 828
2	0,148 721 271
3	0,062 279 092
4	0,034 025 417
5	0,021 402 758
6	0,014 693 746
7	0,010 707 852
8	0,008 148 453
9	0,006 407 958
10	0,005 170 918

Correction

Exercice 5 (*Asie, sujet 1*)

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant : pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1) Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
3) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2,5 - u_n$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times (0,9)^n$.
   c) Quelle limite peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ?
   d) Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.
   D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.
4) On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.
   a) Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
      u=......
      n = n+1
   return n
```

   b) Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
Le débit de la substance médicamenteuse administrée au patient est de 0,5 mg par heure.
La quantité de médicament dans le sang du patient, en fonction du temps, est modélisée par la fonction f, définie sur $[0\,;+\infty[$, par $f(t) = 2,5 - 1,5e^{-0,2t}$, où t désigne la durée de la perfusion exprimée en heure.
On rappelle que ce médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.
1) Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45 min ? et au bout de 4 h ?
2) Soit t un réel positif. Déterminer l'expression de $f'(t)$ et en déduire le tableau de variations de f.
3) En utilisant la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 de l'unique solution de l'équation $f(t) = 1,8$.

Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 4. b. du modèle discret de la Partie A. Correction