CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Matrices	**Le 8 février 2024**

Exercice 1

1) La courbe $\mathscr{C}$ passe par $I(2\ ;\ 8{,}1)$, donc $f(2)=8{,}1$; on obtient alors $a\times 2^2+b\times 2+c=8{,}1$, c'est-à-dire $4a+2b+c=8{,}1$.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par $J(10\ ;\ 2{,}5)$, donc $f(10)=2{,}5$; on obtient alors $a\times 10^2+b\times 10+c=2{,}5$, c'est-à-dire $100a+10b+c=2{,}5$.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par $K(20\ ;\ 0)$, donc $f(20)=0$; on obtient alors $a\times 20^2+b\times 20+c=0$, c'est-à-dire $400a+20b+c=0$.

Donc **a, b et c sont solutions du système (S)** $\begin{cases} 4a+2b+c=8{,}1 \\ 100a+10b+c=2{,}5 \\ 400a+20b+c=0 \end{cases}$.

2) Soit $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8{,}1 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$A\times X=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\times a+2\times b+1\times c \\ 100\times a+10\times b+1\times c \\ 400\times a+20\times b+1\times c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8{,}1 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'après la question précédente.

Donc **le système (S) est équivalent à l'équation matricielle $AX=B$ avec**
$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8{,}1 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ **et** $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

3) $AX=B$ équivaut à $A^{-1}AX=A^{-1}B$, c'est-à-dire équivaut à $I_3X=A^{-1}B$.

Donc $AX=B$ équivaut $X=A^{-1}B$.
Or, en utilisant la calculatrice, et en prenant des arrondis au centième près, on obtient
$X=\begin{pmatrix} 0{,}025 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$. Par conséquent, **pour tout réel x de $[0\ ;\ 20]$, $f(x)=0{,}025x^2-x+10$**.

Exercice 2

1) 20 % des souris du compartiment A passent dans le compartiment B, alors 80 % des souris du compartiment A restent dans A.
10 % des souris du compartiment B arrivent dans A.
Par suite, on a : $a_{n+1}=0{,}8a_n+0{,}1b_n$.

10 % des souris du compartiment B passent dans le compartiment A, alors 90 % des souris du compartiment B restent dans B.
20 % des souris du compartiment A arrivent dans B.
Par suite, on a : $b_{n+1}=0{,}2a_n+0{,}9b_n$.

2) $A=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

3) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de **N**, $U_n = A^n\ U_0$ »

→ *Initialisation* : $A^n\ U_0 = A^0\ U_0 = I_p \times U_0 = U_0$. Par suite, on a $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $k \geq 0$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors : $U_k = A^k\ U_0$.
$U_{k+1} = A \times U_k = A \times A^k \times U_0 = A^{k+1} \times U_0$. On en déduit que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :
$\mathscr{P}(0)$ et pour tout k supérieur ou égal à 0, $\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1)$.

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :
pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathscr{P}(n)$ est vraie
C'est-à-dire : pour tout n de **N**, $\boldsymbol{U_n = A^n\ U_0}$.

4) $U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0,7^n}{3} & \dfrac{1-0,7^n}{3} \\ \dfrac{2-2\times 0,7^n}{3} & \dfrac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0,7^n}{3}\times 0,5 + \dfrac{1-0,7^n}{3}\times 0,5 \\ \dfrac{2-2\times 0,7^n}{3}\times 0,5 + \dfrac{2+0,7^n}{3}\times 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2+0,7^n}{6} \\ \dfrac{4-\times 0,7^n}{6} \end{pmatrix}$.

On en déduit que, pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{2+0,7^n}{6}$ et $b_n = \dfrac{4-0,7^n}{6}$.

Comme $-1 < 0,7 < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,7^n = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ (par somme et produit de limites).

On en conclut que la répartition à long terme des souris dans les compartiments est de $\dfrac{1}{3}$ pour le compartiment A et de $\dfrac{2}{3}$ pour le compartiment B.

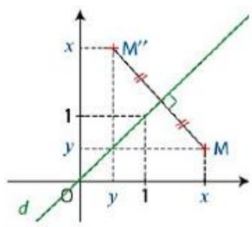
Exercice 3

1) **La matrice de r est** $\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} x_B \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 5 + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times 3 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 5 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Donc ***B* a pour coordonnées $\left(\sqrt{2}\ ;\ 4\sqrt{2}\right)$**.

2) Soit $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ l'image du point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par la symétrie par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
Alors M' a pour coordonnées $(y\ ;\ x)$. Donc **la matrice de s est** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.



b) $\begin{pmatrix} x_C \\ x_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 5 + 0\times 3 \\ 0\times 5 + 1\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Donc ***C* a pour coordonnées $(5\ ;\ 3)$**.