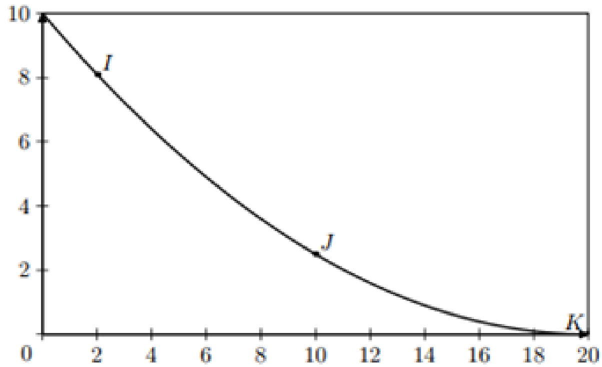
DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Matrices	**Le 8 février 2024**

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (5 *points*)

La forme d'un toboggan est modélisée par une fonction f dont la courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-contre dans un repère orthonormé.
Cette courbe passe par les points de coordonnées $I(2\,;\,8{,}1)$, $J(10\,;\,2{,}5)$ et $K(20\,;\,0)$.
La fonction f est définie sur $[0\,;\,20]$ par par $f(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c désignent des nombres réels.



1) Justifier que a, b et c sont solutions du système (S) : $\begin{cases} 4a+2b+c=8{,}1 \\ 100a+10b+c=2{,}5 \\ 400a+20b+c=0 \end{cases}$.

2) Montrer que ce système (S) est équivalent à l'équation matricielle $AX=B$, où $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et dont on déterminer *A* et *B*.

3) Résoudre le système (S) à l'aide d'un calcul matriciel et en déduire l'expression de $f(x)$

Exercice 2 (5 points)

Des souris sont dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte dix minutes tous les jours. Chaque jour 20 % des souris du compartiment A passent dans le compartiment B et 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B passent dans le compartiment A. Pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B après n jours et on convient que $a_0=b_0=0{,}5$ et on note U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1) Exprimer pour tout entier naturel n, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2) Déterminer la matrice A telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=A\times U_n$.
3) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n=A^n\times U_0$.
4) On admet que pour tout entier naturel n, $A^n=\begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{1-0{,}7^n}{3} \\ \dfrac{2-2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{2+0{,}7^n}{3} \end{pmatrix}$.

Que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B ?

Exercice 3 (4 *points*)

Soit le repère orthonormé $\left(O\ ;\vec{i},\vec{j}\right)$. On donne le point A de coordonnées $(5\ ;\ 3)$.

1) a) Donner la matrice de la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

   b) En déduire les coordonnées du point B, image de A par la rotation r.
   Détailler les calculs.

2) a) Soit s la symétrie par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
   Donner la matrice de s.
   b) En déduire les coordonnées du point C, image de A par la symétrie s.
   Détailler les calculs.