CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

Nombres complexes	*Le 18 janvier 2024*

Exercice 1

1) $z_1 = 3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i}$.

2) $z_2 = 10\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 10(0 - i) = \boldsymbol{-10i}$.

Exercice 2

a) $|z_1| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Soit θ un argument de z_1 ; on a : $\left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-4}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{4}\quad[2\pi]$.

Par conséquent, $\boldsymbol{z_1 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$.

2) $|z_2| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Soit θ' un argument de z_2 ; on a : $\left.\begin{array}{l} \cos(\theta') = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta') = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$ donc $\theta' = -\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.

Par conséquent, $\boldsymbol{z_2 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)}$.

3) $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{|z_2|}{|z_1|} = \dfrac{2}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et $\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = \arg(z_2) - \arg(z_1) = -\dfrac{\pi}{12}\quad[2\pi]$

Donc $\boldsymbol{\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right)}$.

4) $\left|(z_1)^4\right| = |z_1|^4 = \left(4\sqrt{2}\right)^4 = 1024$ et $\arg\left((z_1)^4\right) = 4 \times \arg(z_1) = -\pi\quad[2\pi]$

Donc $\boldsymbol{(z_1)^4 = 1024\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right)}$.

Exercice 3

$\boldsymbol{z_A = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$; $\boldsymbol{z_B = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}$;

$\boldsymbol{z_C = 2\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)}$; $\boldsymbol{z_D = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)}$

Exercice 4

2) a) $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-1+7i-2-i}{6+3i-2-i} = \dfrac{-3+6i}{4+2i} = \dfrac{(-3+6i)(4-2i)}{4^2+2^2} = \dfrac{-12+6i+24i+12}{20} = \dfrac{30i}{20} = \dfrac{3}{2}i$.

b) D'après la question précédente, on en déduit que $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Or $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$; par suite, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, **le triangle *ABC* est rectangle en *A***.

3) a) $|z-2-i| = |z-6-3i|$ équivaut à $AM = BM$.

Donc (Δ) **est la médiatrice du segment $[AB]$**.

b) Le milieu du segment $[BC]$ a pour affixe $\dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{6+3i-1+7i}{2} = \dfrac{5}{2} + 5i = z_E$.

Par suite, ***E* est le milieu du segment $[BC]$**.

4) a) $EB = |z_B - z_E| = \left|6+3i-\dfrac{5}{2}-5i\right| = \left|\dfrac{7}{2}-2i\right| = \sqrt{\dfrac{49}{4}+4} = \sqrt{\dfrac{65}{4}} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

b) $|z - z_E| = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$ équivaut à $EM = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

Donc $(\mathscr{C})$ **est le cercle de centre *E* et de rayon $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$**.

D'après la question précédente, *B* appartient à ce cercle.

c) Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.
Le point *E* est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$ et le rayon de $(\mathscr{C})$ est égale à la distance *EB*.
$(\mathscr{C})$ est donc le cercle circonscrit au triangle *ABC*, **il passe donc par les points *A*, *B* et *C***.