# CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 3

| *Divisibilité, congruences* | *Le 30 novembre 2023* |
| --- | --- |

**Exercice 1**

1) Prenons $n = 5$ et $p = 7$. On a alors 5 qui divise $np = 35$.

De plus, 5 divise $n$ mais 5 ne divise pas $p$.
**L'affirmation est donc fausse**.

2) **L'affirmation est donc fausse**.
Prenons un contre-exemple : $n = 17$ et $p = 7$.
La division euclidienne de 17 par 7 donne $17 = 2 \times 7 + 3$ avec $0 \leq 3 < 7$.
Mais la division euclidienne de $17^2$ par 7 donne $17^2 = 289 = 41 \times 7 + 2$ $0 \leq 2 < 7$ (et non pas $17^2 = 289 = 40 \times 7 + 9172 = 289 = 40 \times 7 + 9$ car $9 > 7$).

**Exercice 2**

1) On divise 63 par un entier naturel $b$ ; le reste est 17. Alors $63 = b \times q + 17$ avec $b > 17$.
Par suite, $b \times q = 63 - 17 = 46$ et $b > 17$.
Cherchons les diviseurs de 46 : 1 ; 2 ; 23 ; 46.
Donc **les couples $(b\ ;\ q)$ sont (46 ; 1), (23 ; 2)**.

2) $7 \equiv 2\ [5]$ ; par suite, pour tout entier naturel $n$, $7^n \equiv 2^n\ [5]$.
On en déduit que $7^n - 2^n \equiv 2^n - 2^n\ [5]$, c'est-à-dire $7^n - 2^n \equiv 0\ [5]$.
Par conséquent, **pour tout entier naturel $n$, $7^n - 2^n$ est un multiple de 5**.

3) $6 \equiv -1\ [7]$ ; par suite, $6^{2018} \equiv (-1)^{2018}\ [7]$, c'est-à-dire $6^{2018} \equiv 1\ [7]$.
Comme $0 \leq 1 < 7$, alors **le reste de la division euclidienne de $6^{2018}$ par 7 est 1**.

4) $2012 \equiv 3\ [7]$ ; $2011 \equiv 2\ [7]$ et $2010 \equiv 1\ [7]$.
D'après les propriétés des congruences, on obtient : $2012 \times 2011 \times 2010 \equiv 3 \times 2 \times 1\ [7]$, c'est-à-dire $2012 \times 2011 \times 2010 \equiv 6\ [7]$. Comme $0 \leq 6 < 7$, alors **le reste de la division euclidienne de $2012 \times 2011 \times 2010$ par 7 est 6**.

**Exercice 3**

1) a) Rang dans l'alphabet de la lettre $u$ : 21
**Le nombre correspondant à ce code est donc 2101308937097**.

b) D'après le critère de divisibilité par 9, le nombre 2101308937092 est divisible par 9, d'où **le reste de la division euclidienne de 2101308937092 par 9 est égal à 5**.

c) Comme ce reste est le même pour tous les billets authentiques et vaut 8, alors **il semble que ce billet soit faux**.

2) Le code est donc 190216644810$x$. Or $1 + 9 + 0 + 2 + 1 + 6 + 6 + 4 + 4 + 8 + 1 + 0 + x = 42 + x$.
Comme ce reste est le même pour tous les billets authentiques et vaut 8, alors
$\mathbf{42 + x \equiv 8\ [9]}$.

On en déduit que $x \equiv -34\ [9]$, c'est-à-dire $x \equiv 2\ [9]$ car $-34 + 4 \times 9 = 2$.

Comme $x$ est un chiffre compris entre 0 et 9, alors $\mathbf{x = 2}$.