| CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 | |
|---|---|
| **Matrices** | **Le 16 octobre 2023** |

**Exercice 1**

1) $A=\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

2) $c_{3,2}=1\times(-2)+0\times(-4)+2\times 8=-2+0+16=\mathbf{14}$.

**Exercice 2**

1) $A\times B$ **n'a pas de sens** car $(2\times 3)\times(2\times 2)$.

$B\times C$ **n'a pas de sens** car $(2\times 2)\times(3\times 2)$.

$C\times B$ **a du sens** car $(3\times 2)\times(2\times 2)$.

2) $A\times C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times 4+0\times 0+2\times 5 & 3\times 2+0\times(-1)+2\times 1 \\ 1\times 4+1\times 0+2\times 5 & 1\times 2+1\times(-1)+2\times 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{22} & \mathbf{8} \\ \mathbf{14} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$.

$B^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times 3+1\times 0 & 3\times 1+1\times 1 \\ 0\times 3+1\times 0 & 0\times 1+1\times 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

**Exercice 3**

$5\times 7-7\times 2=35-14=21\neq 0$ ; alors **$D$ est inversible**.

Soit $D^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On doit obtenir : $D\times D^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'où $\begin{pmatrix} 5\times a+2\times c & 5\times b+2\times d \\ 7\times a+7\times c & 7\times b+7\times d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\begin{cases} 5a+2c=1 \\ 7a+7c=0 \\ 7b+7d=1 \\ 5b+2d=0 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} 5a+2c=1 \\ a+c=0 \\ b+d=\dfrac{1}{7} \\ d=-\dfrac{5}{2}b \end{cases}$.

Or $\begin{cases} 5a+2c=1 \\ a+c=0 \\ b+d=\dfrac{1}{7} \\ d=-\dfrac{5}{2}b \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 5a-2a=1 \\ c=-a \\ b-\dfrac{5}{2}b=\dfrac{1}{7} \\ d=-\dfrac{5}{2}b \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ c=-a \\ b=\dfrac{1}{7}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{2}{21} \\ d=-\dfrac{5}{2}b \end{cases}$, ou encore à

$$\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ c=-\frac{1}{3} \\ b=-\frac{2}{21} \\ d=-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{2}{21}\right)=\frac{5}{21} \end{cases}$$ . Par conséquent, $\boldsymbol{D^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{21} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{21} \end{pmatrix}}$.

**Exercice 4**

$M^2=-5M+3I_3$ équivaut à $M^2+5M=3I_3$, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}\left(M^2+5M\right)=I_3$.

Or $M^2+5M=M\times M+5M\times I_3=M\times\left(M+5I_3\right)=\left(M+5I_3\right)\times M$.

On en déduit que $\frac{1}{3}M\times\left(M+5I_3\right)=\frac{1}{3}\left(M+5I_3\right)\times M=I_3$.

Par conséquent, $M$ est inversible et $\boldsymbol{M^{-1}=\frac{1}{3}\left(M+5I_3\right)}$.

**Exercice 5**

1) $$\boldsymbol{E^2}=\begin{pmatrix} 0\times0+1\times0+2\times0 & 0\times1+1\times0+2\times0 & 0\times2+1\times(-1)+2\times0 \\ 0\times0+0\times0+(-1)\times0 & 0\times1+0\times0+(-1)\times0 & 0\times2+0\times(-1)+(-1)\times0 \\ 0\times0+0\times0+0\times0 & 0\times1+0\times0+0\times0 & 0\times2+0\times(-1)+0\times0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E^3}=\begin{pmatrix} 0\times0+0\times0+(-1)\times0 & 0\times1+0\times0+(-1)\times0 & 0\times2+0\times(-1)+(-1)\times0 \\ 0\times0+0\times0+0\times0 & 0\times1+0\times0+0\times0 & 0\times2+0\times(-1)+0\times0 \\ 0\times0+0\times0+0\times0 & 0\times1+0\times0+0\times0 & 0\times2+0\times(-1)+0\times0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

2) **Il semble que pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ supérieur ou égale à 3, $\boldsymbol{E^n=O}$**.

On dit que $E$ est nilpotente, il existe une puissance de $N$ qui est nulle mais $N$ est non nulle.