

DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Matrices

Le 16 octobre 2023

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (2 points)

1) Écrire la matrice $(a_{i,j})$ de dimension 5×6 définie par $a_{i,j} = i - 1$ si i est pair, et 7 sinon.

2) On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & -3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -51 & -2 & 3 \\ 7 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

On note $C = A \times B$ et $C = (c_{i,j})$. Calculer, en détaillant, le coefficient $c_{3,2}$.

Exercice 2 (3 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Parmi les produits suivants $A \times B$, $B \times C$ et $C \times B$, lesquels ont un sens ? Justifier.

2) Calculer $A \times C$ et B^2 en détaillant les calculs.

Exercice 3 (3 points)

On considère la matrice suivante : $D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Démontrer que D est inversible et déterminer son inverse D^{-1} .

Exercice 4 (2 points)

On considère une matrice M d'ordre 3 telle que $M^2 = -5M + 3I_3$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Démontrer que M est inversible et déterminer son inverse M^{-1} en fonction de M et I_3 .

Exercice 5 (2 points)

On considère la matrice $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer E^2 et E^3 en utilisant la calculatrice.

2) Soit n un entier naturel. Quelle conjecture peut-on émettre sur E^n ?