CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Nombres complexes	*Le 28 septembre 2023*

Exercice 1

a) $z_1 = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}i - (-2+3\,i) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}i + 2 - 3\,i = \left(-\frac{2}{3}+2\right) + i\left(\frac{3}{2}-3\right) = \mathbf{\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\,i}$.

b) $z_2 = (2-15\,i)\overline{(-8+i)} = (2-15\,i)(-8-i) = -16 - 2\,i + 120\,i - 15 = \mathbf{-31 + 118\,i}$.

c) $z_3 = \left(\sqrt{3} - 5\,i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\times\sqrt{3}\times 5\,i + (5\,i)^2 = 3 - 10\sqrt{3}\,i - 25 = \mathbf{-22 - 10\sqrt{3}\,i}$.

d) $z_4 = \frac{1-5\,i}{4-3\,i} = \frac{(1-5\,i)(4+3\,i)}{(4-3\,i)(4+3\,i)} = \frac{4+3\,i-20\,i+15}{4^2+3^2} = \frac{19-17\,i}{25} = \mathbf{\frac{19}{25} - \frac{17}{25}\,i}$.

Exercice 2

a) $Z = \frac{z+1}{z-i} = \frac{x+iy+1}{x+iy-i} = \frac{(x+iy+1)(x-iy+i)}{(x+iy-i)(x-iy+i)} = \frac{x^2 - ixy + ix + ixy + y^2 - y + x - iy + i}{x^2 + (y-1)^2}$.

$Z = \frac{\left(x^2+y^2-y+x\right) + i(x-y+1)}{x^2+(y-1)^2} = \mathbf{\frac{x^2+y^2-y+x}{x^2+(y-1)^2} + i\,\frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2}}$.

b) **Z est un imaginaire pur** si, et seulement si, $\mathrm{Re}(Z) = 0$, c'est-à-dire, si, et seulement si, $\mathbf{x^2 + x + y^2 - y = 0}$ **et** $\mathbf{(x\,;y) \neq (0\,;\,1)}$.

Exercice 3

1) $\frac{z+1}{z-1} = 2i$ équivaut à $z+1 = 2i(z-1)$, c'est-à-dire à $z+1 = 2iz - 2i$, ou encore à $(1-2i)z = -1-2i$.

Or $(1-2i)z = -1-2i$ équivaut à $z = \frac{-(1+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-\left(1^2+4i+(2i)^2\right)}{1^2+2^2} = \frac{-(1-4+4i)}{5}$.

Par conséquent, $\mathscr{S} = \left\{\mathbf{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\,i}\right\}$.

2) Soit $z = x+iy$ avec x et y deux réels.

$(2-i)z + \overline{z} - i = 1+3i$ équivaut à $(2-i)(x+iy) + (x-iy) - i = 1+3i$, c'est-à-dire à $2x + 2iy - ix + y + x - iy - i = 1+3i$, ou encore à $(3x+y) + i(-x+y-1) = 1+3i$.

Or deux nombres complexes sont égaux s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Par suite, $(3x+y) + i(-x+y-1) = 1+3i$ équivaut à $\begin{cases} 3x+y=1 \\ -x+y-1=3 \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} 3x+y=1 \\ -x+y=4 \end{cases}$

Or $\begin{cases} 3x+y=1 \\ -x+y=4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 4x=-3 \\ -x+y=4 \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} x=-\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}+y=4 \end{cases}$, ou encore à

$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \\ y = 4 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{13}{4} \end{cases}$. Par conséquent, $\boldsymbol{\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{4} + \frac{13}{4} i \right\}}$.

Exercice 4

Soit $z = a + ib$, avec a et b des réels non nuls en même temps. Alors on obtient :

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a+ib} + \frac{1}{a-ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} + \frac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a-ib+a+ib}{a^2+b^2}.$$

D'où $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{2a}{a^2+b^2}$. Comme a et b sont des réels, alors $\dfrac{2a}{a^2+b^2}$ est un réel.

Par conséquent, **pour tout complexe z non nul, $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$ est un réel**.