CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 7

Théorèmes de Bézout et de Gauss	*Pour le 29 mars 2024*

1) a) 4 et 9 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout, **il existe un couple $(u\ ;\ v)$ tel que $4u+9v=1$**.

b) Comme $4u+9v=1$, alors $4u=1-9v$ et $9v=1-4u$.

- $x_0=5\times(1-9v)+3\times 9v=5-9v(5+3)$. Comme $v(5+3)$ est un entier, alors $x_0=5\quad[9]$.
- $x_0=4u+9v=4u+9(1-4u)=9+(1-9)4u$. Comme $(1-9)u$ est un entier, alors $x_0=3\quad[4]$.

Par conséquent, **$x_0=5\times 4u+3\times 9v$ appartient à $\mathscr{S}$**.

c) Une solution évidente de l'équation $4u+9v=1$ est $(-2\ ;\ 1)$.

En effet, $4\times(-2)+9\times 1=-8+9=1$.

Par suite, $x_0=5\times 4\times(-2)+3\times 9\times 1=-40+27=-13$.

Donc **$x_0=-13$ appartient à $\mathscr{S}$**.

2) a) Comme x et x_0 sont deux éléments de $\mathscr{S}$, alors $x-x_0$ est divisible par 4 et par 9.

En effet, $x=3\quad[4]$ et $x_0=3\quad[4]$, alors $x-x_0=0\quad[4]$.

Or 4 et 9 sont premiers entre eux, d'où, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $4\times 9=$ **36 divise $x-x_0$**.

b) D'après la question précédente, x appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si, $x-x_0\equiv 0\quad[36]$, c'est-à-dire, si et seulement si $x\equiv x_0\quad[36]\equiv -13\quad[36]$.

Par conséquent, **un entier relatif x appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si, x peut s'écrire sous la forme $x=-13+36k$ où k est un entier relatif**.

3) Soit x le nombre de sushis.
Quand on range ces sushis uniquement dans des boites de 4, on s'aperçoit qu'après avoir rempli le plus de boîtes possibles, il en reste 3 ; alors $x\equiv 3\quad[4]$.

Quand on range ces sushis uniquement dans des boites de 9, on constate qu'il en reste au final 5 ; alors $x\equiv 5\quad[9]$.

Donc x est solution du système $\begin{cases} x=3 & [4] \\ x=5 & [9] \end{cases}$.

D'après la question 2) b), $x=-13+36k$ où k est un entier relatif.

Or x doit être compris entre 210 et 270. Cherchons donc un entier relatif k vérifiant $210<-13+36k<270$.

Or $210<-13+36k<270$ équivaut à $223<36k<283$, c'est-à-dire à $\dfrac{223}{36}<k<\dfrac{283}{36}$.

Comme $\dfrac{223}{36}\approx 6{,}2$ et $\dfrac{283}{36}\approx 7{,}9$, alors $k=7$. Par suite, $x=-13+36\times 7=239$.
Par conséquent, **ce client a commandé 239 sushis**.

C. Lainé