

DEVOIR MAISON N° 7

Théorèmes de Bézout et de Gauss

Pour le 29 mars 2024

On se propose de déterminer l'ensemble \mathcal{P} des entiers relatifs x vérifiant le système :

$$\begin{cases} x = 3 & [4] \\ x = 5 & [9] \end{cases}$$

1) Recherche d'un élément de \mathcal{P}

On désigne par $(u ; v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $4u + 9v = 1$.

a) Justifier l'existence d'un tel couple $(u ; v)$.

b) On pose $x_0 = 5 \times 4u + 3 \times 9v$.

Démontrer que x_0 appartient à \mathcal{P} .

c) Donner un exemple d'entier x_0 appartenant à \mathcal{P} .

2) Caractérisation des éléments de \mathcal{P}

a) Soit x un entier relatif appartenant à \mathcal{P} . Démontrer que $x - x_0$ est divisible par 36.

b) En déduire qu'un entier relatif x appartient à \mathcal{P} si, et seulement si, x peut s'écrire sous la forme $x = -13 + 36k$ où k est un entier relatif.

3) Application

Un restaurant Japonais propose la livraison de sushis. Pour ranger ces sushis, ce restaurant dispose de deux types de boîtes: des boîtes de 4 et des boîtes de 9.

Un client vient d'appeler et a commandé, pour un banquet, un certain nombre de sushis.

Quand on range ces sushis uniquement dans des boîtes de 4, on s'aperçoit qu'après avoir rempli le plus de boîtes possibles, il en reste 3. Quand on range ces sushis uniquement dans des boîtes de 9, on constate qu'il en reste au final 5.

Sachant que ce client a commandé entre 210 et 270 sushis, combien ce client a-t-il commandé de sushis ?

