CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 6

Matrices	*Pour le 26 février 2024*

1) Expérimentation avec un tableur

a) **Il semble que la suite (c_n) soit décroissante, que la suite (s_n) soit croissante et que la suite $\left(\frac{c_n}{s_n}\right)$ soit croissante. À long terme, on observe une stabilisation du rapport $\frac{c_n}{s_n}$ autour de 1,3**.

b) **L'évolution ne semble pas être influencée par les conditions initiales**.

2) Justification avec l'outil matriciel

a) $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -1,04 & 1,1 \end{pmatrix} \times U_n = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -1,04 & 1,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_n \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \times c_n + 0,4 \times s_n \\ -1,04 \times c_n + 1,1 \times s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

Par conséquent, **pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A\ U_n$ où $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -1,04 & 1,1 \end{pmatrix}$**.

b) Comme pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A\ U_n$, alors d'après une propriété du cours, **pour tout n de N, $U_n = A^n\ U_0$**. (*on pourrait refaire la démonstration du cours*).

c) D'après la calculatrice, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{55} & \frac{1}{11} \\ \frac{13}{55} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$. D'où :

$$P \times D \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,02 & 0 \\ 0 & 0,58 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{55} & \frac{1}{11} \\ \frac{13}{55} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,2+0 & 0+5,8 \\ 13,26+0 & 0+0,58 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{55} & \frac{1}{11} \\ \frac{13}{55} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10,2 & 5,8 \\ 13,26 & 0,58 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{55} & \frac{1}{11} \\ \frac{13}{55} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -1,04 & 1,1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\boldsymbol{P \times D \times P^{-1} = A}$.

d) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout n entier naturel non nul, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ »

$\rightarrow$ *Initialisation* : $A = P \times D^1 \times P^{-1}$. Par suite, on a $\mathscr{P}(1)$ qui est vraie.

$\rightarrow$ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors : $A^k = P \times D^k \times P^{-1}$.

$A^{k+1} = A \times A^k = A \times P \times D^k \times P^{-1} = P \times D \times P^{-1} \times P \times D^k \times P^{-1} = P \times D \times I_2 \times D^k \times P^{-1} = P \times D^{k+1} \times P^{-1}$

On en déduit que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :

$\mathscr{P}(1)$ et pour tout k supérieur ou égal à 0, $\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1)$.

$\rightarrow$ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathscr{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout n entier naturel non nul, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$**.

C. Lainé

e) Comme D est une matrice diagonale, alors, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 1{,}02^n & 0 \\ 0 & 0{,}58^n \end{pmatrix}$

D'après la question précédente, on en déduit que :

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1{,}02^n & 0 \\ 0 & 0{,}58^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{55} & \frac{1}{11} \\ \frac{13}{55} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \times 1{,}02^n & 5 \times 0{,}58^n \\ 13 \times 1{,}02^n & 0{,}58^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{55} & \frac{1}{11} \\ \frac{13}{55} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{10}{55} \times 1{,}02^n + \frac{65}{55} \times 0{,}58^n & \frac{10}{11} \times 1{,}02^n - \frac{10}{11} \times 0{,}58^n \\ -\frac{13}{55} \times 1{,}02^n + \frac{13}{55} \times 0{,}58^n & \frac{13}{11} \times 1{,}02^n - \frac{2}{11} \times 0{,}58^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \times 1{,}02^n + \frac{13}{11} \times 0{,}58^n & \frac{10}{11} \times 1{,}02^n - \frac{10}{11} \times 0{,}58^n \\ -\frac{13}{55} \times 1{,}02^n + \frac{13}{55} \times 0{,}58^n & \frac{13}{11} \times 1{,}02^n - \frac{2}{11} \times 0{,}58^n \end{pmatrix}$$

D'après la question 2) b), $U_n = A^n \times U_0$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, **pour tout entier naturel n, on a** :

$$\boldsymbol{U_n} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \times 1{,}02^n + \frac{13}{11} \times 0{,}58^n & \frac{10}{11} \times 1{,}02^n - \frac{10}{11} \times 0{,}58^n \\ -\frac{13}{55} \times 1{,}02^n + \frac{13}{55} \times 0{,}58^n & \frac{13}{11} \times 1{,}02^n - \frac{2}{11} \times 0{,}58^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{6}{11} \times 1{,}02^n + \frac{39}{11} \times 0{,}58^n + \frac{20}{11} \times 1{,}02^n - \frac{20}{11} \times 0{,}58^n \\ -\frac{39}{55} \times 1{,}02^n + \frac{39}{55} \times 0{,}58^n + \frac{26}{11} \times 1{,}02^n - \frac{4}{11} \times 0{,}58^n \end{pmatrix} \boldsymbol{=} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{14}{11} \times 1{,}02^n + \frac{19}{11} \times 0{,}58^n} \\ \boldsymbol{\frac{91}{55} \times 1{,}02^n + \frac{19}{55} \times 0{,}58^n} \end{pmatrix}$$

e) • D'après la question précédente, on en déduit que : $\boldsymbol{c_n = \frac{14}{11} \times 1{,}02^n + \frac{19}{11} \times 0{,}58^n}$ et

$\boldsymbol{s_n = \frac{91}{55} \times 1{,}02^n + \frac{19}{55} \times 0{,}58^n}$**, pour tout entier naturel n**.

Comme $1{,}02 > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}02^n = +\infty$, et, comme $0 < 0{,}58 < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}58^n = 0$.

D'où, par produit et somme de limites, on obtient : $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = +\infty}$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty}$.

f) D'après la question précédente, $\dfrac{s_n}{c_n} = \dfrac{\frac{91}{55} \times 1{,}02^n + \frac{19}{55} \times 0{,}58^n}{\frac{14}{11} \times 1{,}02^n + \frac{19}{11} \times 0{,}58^n} = \dfrac{\cancel{1{,}02^n}\left(\frac{91}{55} + \frac{19}{55} \times \frac{0{,}58^n}{1{,}02^n}\right)}{\cancel{1{,}02^n}\left(\frac{14}{11} + \frac{19}{11} \times \frac{0{,}58^n}{1{,}02^n}\right)}$

c'est-à-dire, $\dfrac{s_n}{c_n} = \dfrac{\frac{91}{55} + \frac{19}{55} \times \left(\frac{0{,}58}{1{,}02}\right)^n}{\frac{14}{11} + \frac{19}{11} \times \left(\frac{0{,}58}{1{,}02}\right)^n}$. Comme $0 < \dfrac{0{,}58}{1{,}02} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{0{,}58}{1{,}02}\right)^n = 0$.

Donc par somme et quotient de limites, on obtient : $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{s_n}{c_n}} = \dfrac{\frac{91}{55}}{\frac{14}{11}} = \dfrac{91}{55} \times \dfrac{11}{14} \boldsymbol{= 1{,}3}$.

g) **Les conjectures du 1) sont bien vérifiées**.