DEVOIR MAISON N° 6	
Matrices	***Pour le 26 février 2024***

On s'intéresse à l'évolution couplée de deux populations : des chouettes et des souris.

http://www.ibuzz365.com/photos/82-chouette-vs-souris.html

On note respectivement c_n et s_n le nombre, en milliers, de chouettes et de souris au 1er juin de l'année $2014+n$ (où n désigne un nombre entier naturel).
Les scientifiques modélisent la prédation entre ces deux espèces (chouettes et souris) de la manière suivante.

Pour tout entier naturel n : $\begin{cases} c_{n+1} = 0{,}5c_n + 0{,}4s_n \\ s_{n+1} = -0{,}104c_n + 1{,}1s_n \end{cases}$.

Les coefficients 0,5 et 1,1 indiquent la croissance de chaque espèce en isolation. Les chouettes disparaissent sansnourriture tandis que les souris augmentent sans prédateurs.
Les deux autres nombres 0,4 et – 0,104 mesurent la conséquence de la prédation : positif pour les chouettes etnégatif pour les souris.
En 2014, on comptait 3000 chouettes et 2000 souris.
On se propose d'étudier l'évolution à long terme.

1) Expérimentation avec un tableur

a) Réaliser la feuille de calcul ci-dessous :

c_0 =	3	s_0 =	2

n	c_n	s_n	s_n / c_n
0	3	2	0,666667
1	2,3	1,888	0,82087
2	1,9052	1,8376	0,964518
3	1,68764	1,823219	1,080337
4	1,573108	1,830027	1,163319
5	1,518564	1,849426	1,217878
6	1,499053	1,876438	1,251749
7	1,500101	1,90818	1,272034
8	1,513323	1,942988	1,283921
9	1,533856	1,979901	1,290799
10	1,558889	2,01837	1,294749

Que remarque-t-on ? Quelle conjecture peut-on émettre quant à la proportion de chaque espèce à long terme ?
b) L'évolution est-elle influencée par les conditions initiales ?

C. Lainé

2) Justification avec l'outil matriciel

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} c_n \\ s_n \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A\ U_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 que l'ondéterminera.
A s'appelle la matrice « proie-prédateur ».
b) En déduire une relation liant U_n et U_0.

c) On considère les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1,02 & 0 \\ 0 & 0,58 \end{pmatrix}$.

On admet que P est inversible ; montrer que $P \times D \times P^{-1} = A$.
d) Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.
e) En déduire les coefficients de la matrice U_n en fonction de n.

f) Déterminer la limite de chacune des suites (c_n) et (s_n).

g) Déterminer la limite de chacune de la suite $\left(\dfrac{s_n}{c_n}\right)$. (On pourra factoriser le numérateur et le dénominateur par $(1,02)^n$ pour lever l'indétermination.)

h) Répondre au problème posé et vérifier la cohérence avec les conjectures émises au 1).