CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 5

Nombres complexes, suites	*Pour le 29 janvier 2024*

Exercice 1

1. a. $u_{n+1} = z_{n+1} - z_A = \frac{1}{2}i \times z_n + 5 - (4+2i) = \frac{1}{2}i \times z_n + 1 - 2i = \frac{1}{2}i\left(z_n + \frac{2(1-2i)}{i}\right)$

Or $\frac{2(1-2i)}{i} = \frac{-2i(1-2i)}{-i^2} = -4-2i = -z_A$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{2}i(z_n - z_A) = \frac{1}{2}i\,u_n$.

b. $u_{n+1} = \frac{1}{2}i\,u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme

$u_0 = z_0 - z_A = -z_A = -4-2i$ donc $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i)$.

2. $(\overrightarrow{AM_n}, \overrightarrow{AM_{n+4}}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM_{n+4}}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AM_n}) = arg(z_{n+4} - z_A) - arg(z_n - z_A)$

$= arg(u_{n+4}) - arg(u_n) = arg\left(\frac{u_{n+4}}{u_n}\right)$

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ donc $\frac{u_{n+4}}{u_n} = \left(\frac{1}{2}i\right)^4 = \frac{1}{16}$ et donc

$arg\left(\frac{u_{n+4}}{u_n}\right) = 0(2\pi)$. Ainsi $(\overrightarrow{AM_n}, \overrightarrow{AM_{n+4}}) = 0(2\pi)$ et les points A, M_n et M_{n+4} sont

alignés.

Exercice 2

1) $j^2 + j + 1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$.

Donc **le nombre complexe *j* est une solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$**.

2) a) $j^3 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

Par suite, **l'affirmation est donc vraie**.

b) On sait d'après la question précédente que $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Or $-j + 1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; donc **l'affirmation est fausse**.

3) $PQ = |j-1| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$;

$PR = |j^2 - 1| = \left|-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$;

$QR = |j^2 - j| = \left|-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(0)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$.

Par conséquent, **le triangle *PQR* est équilatéral**.