DEVOIR MAISON N° 5

Nombres complexes, suites	***Pour le 29 janvier 2024***

Exercice 1

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n \times (-4 - 2i)$.

(on pourra utiliser les résultats connus sur les suites géométriques)

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Exercice 2

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

1) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

2) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses (justifier) :

a) $j^3 = 1$;

b) $j^2 = -j + 1$.

3) On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

C. Lainé