CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 4

Nombres complexes	*Pour le 8 janvier 2024*

1) Dans le triangle rectangle BOJ, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$BJ^2 = BO^2 + OJ^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Comme $BJ > 0$, alors $\boldsymbol{BJ} = BO^2 + OJ^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{5}{4}} \boldsymbol{= \frac{\sqrt{5}}{2}}$.

Comme $K \in [BJ]$, alors $\boldsymbol{BK} = BJ - JK = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \boldsymbol{= \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

2) a) $|z_{A_2}| = OA_2 = 1$ car A_2 appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

$\arg(z_{A_2}) = (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_2}) = (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{z_{A_2} = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)}$.

b) $BA_2^{\ 2} = |z_{A_2} - z_B|^2 = \left|\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right|^2 = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)^2 + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

Donc $\boldsymbol{BA_2^{\ 2}} = \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) \boldsymbol{= 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}$.

c) D'après le logiciel de calcul formel, on sait que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1\right)$.

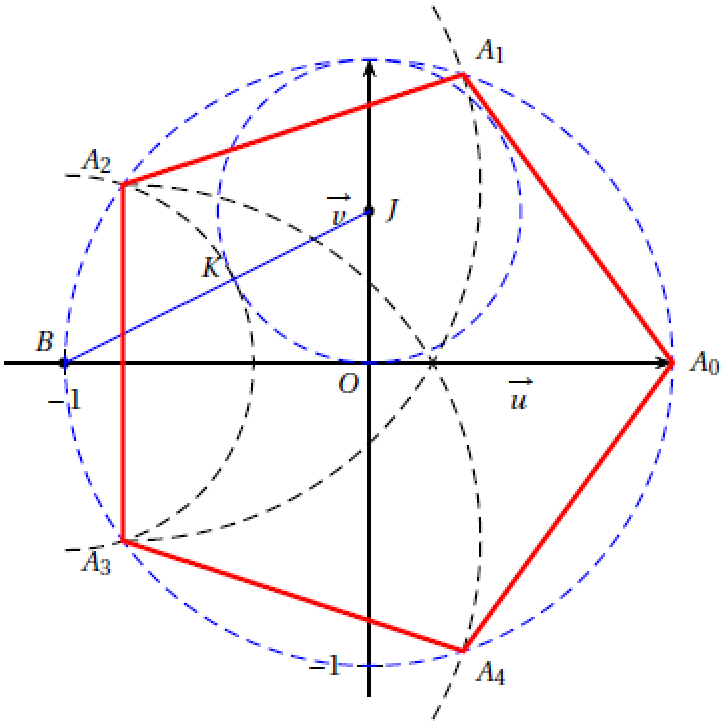
Par suite, $BA_2^{\ 2} = 2 + 2\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{4}\right) = 2 - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Donc $BA_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

Or d'après le logiciel de calcul formel, $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{BA_2 = BK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

3) - le point A_0 est le point d'affixe 1.

- on construit B, J, $[BJ]$ et le cercle $\mathscr{C}$ centré en J passant par O donc de rayon 0,5 ;
- on obtient le point K à l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et du segment $[BJ]$;
- le cercle de centre B de rayon BK coupe le cercle trigonométrique de centre O aux points A_2 et A_3 ;
- le cercle de centre A_2 passant par A_3 recoupe le cercle trigonométrique de centre O en A_1 ;
- le cercle de centre A_3 passant par A_2 recoupe le cercle trigonométrique de centre O en A_4



A_1
A_2
$\vec{v}$
J
K
B
A_0
O
$\vec{u}$
-1
A_3
-1
A_4