CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 2

Matrices	**Pour le 6 novembre 2023**

Page 238 n° 42

1) $A-3I_2=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

Par suite, $A(A-3I_2)=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times0+(-1)\times(-1) & 3\times(-1)+(-1)\times(-3)\\ (-1)\times0+0\times(-1) & (-1)\times(-1)+0\times(-3)\end{pmatrix}$.

Donc $\boldsymbol{A(A-3I_2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$.

2) D'après la question précédente, **la matrice *A* est inversible et sa matrice inverse est** $\boldsymbol{A^{-1}=A(A-3I_2)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}}$.

Page 240 n° 64

1) D'après la calculatrice, $\boldsymbol{P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$.

$$PDP^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\times1+1\times0 & (-1)\times0+1\times3\\ 1\times1+(-3)\times0 & 1\times0+(-3)\times3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\times\left(-\frac{3}{2}\right)+3\times\left(-\frac{1}{2}\right) & (-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\ 1\times\left(-\frac{3}{2}\right)+(-9)\times\left(-\frac{1}{2}\right) & 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(-9)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\boldsymbol{PDP^{-1}=M}$.

2) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n supérieur ou égal à 1, $M^n=PD^nP^{-1}$ »

→ *Initialisation* : $PDP^{-1}=M$. Par suite, on a $\mathcal{P}(1)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n\geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $M^n=PD^nP^{-1}$.
$M^{n+1}=M\times M^n=PDP^{-1}\times PD^nP^{-1}=PDD^nP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$.
On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :

$\mathcal{P}(1)$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}(n)\Rightarrow\mathcal{P}(n+1)$.

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $\boldsymbol{M^n=PD^nP^{-1}}$**.

c) En utilisant la donnée de l'énoncé, on obtient :

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\times 1 + 1\times 0 & (-1)\times 0 + 1\times 3^n \\ 1\times 1 + (-3)\times 0 & 1\times 0 + (-3)\times 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3^n \\ 1 & -3^{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\times\left(-\frac{3}{2}\right) + 3^n \times \left(-\frac{1}{2}\right) & (-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 3^n \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 1\times\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-3^{n+1}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right) & 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-3^{n+1}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\boldsymbol{M^n = \begin{pmatrix} \frac{3-3^n}{2} & \frac{1-3^n}{2} \\ \frac{-3+3^{n+1}}{2} & \frac{-1+3^{n+1}}{2} \end{pmatrix}}$.