CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 1

Nombres complexes, étude de fonctions	*Pour le 9 octobre 2023*

1) $Z = z$ équivaut à $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = z$, c'est-à-dire à $z+\frac{1}{z} = 2z$, ou encore à $\frac{1}{z} = z$, d'où à $z^2 = 1$. Par conséquent, **les nombres complexes non nuls tels que $Z = z$ sont les nombres réels $z = 1$ et $z = -1$**.

2) a) f_k est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que fonction rationnelle.

Pour tout réel x différent de 0, on a : $f_k'(x) = \frac{1}{2}\left(1+k\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\times\frac{x^2-k}{x^2}$.

• **si k est strictement négatif** : $x^2 - k > 0$; par suite, $f_k'(x) > 0$ pour tout réel x non nul.
On en déduit que **f_k est strictement croissante sur $]-\infty\ ;0[$ et sur $]0\ ;+\infty[$**.

• **si k est strictement positif** : $f_k'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{\left(x-\sqrt{k}\right)\left(x+\sqrt{k}\right)}{x^2}$.
On en déduit que **f_k est croissante sur $\left]-\infty\ ;\sqrt{k}\right[$ et sur $\left]\sqrt{k}\ ;+\infty\right[$**, et, **décroissante sur $\left]0\ ;\sqrt{k}\right[$ et sur $\left]-\sqrt{k}\ ;0\right[$**.

b) • **si k est strictement négatif** :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• **si k est strictement positif** :

x	$-\infty$		$-\sqrt{k}$		0		$\sqrt{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{k}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{k}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) On a, dans ce cas, $Z = f_1(z)$ avec z un nombre réel différent de 0.
D'après la question 2) b), **Z prend ses valeurs dans $]-\infty\ ;-1]$ et $[1\ ;+\infty[$ lorsque le nombre réel z prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^*$**.

b) Comme z est un imaginaire pur, alors $z = ix$ avec x un réel différent de 0.

Alors $Z = \frac{1}{2}\left(ix+\frac{1}{ix}\right) = \frac{1}{2}\left(ix+\frac{-ix}{ix(-ix)}\right) = \frac{1}{2}\left(ix+\frac{-ix}{x^2}\right) = \frac{1}{2}i\left(x-\frac{1}{x}\right) = i\,f_{-1}(x)$.

Donc **Z est un imaginaire pur dont la partie imaginaire décrit $\mathbb{R}$** (cas où k est strictement négatif).