MATRICES (PARTIE 2)

Cours	Terminale maths expertes

Objectifs :
- *Résoudre un système linéaire à l'aide d'une matrice.*
- *Représenter des transformations géométriques.*
- *Déterminer la convergence d'une suite de matrices colonnes.*

1. Résolution d'un système linéaire

Exemple : On considère le système (S) suivant : $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -4x+3y=-1 \end{cases}$.

On pose : $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par suite, $A\times X=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+3y \\ -4x+3y \end{pmatrix}$.

Le système (S) peut donc s'écrire $A\times X=B$.

Propriété 1. *Matrice inverse d'une matrice carrée d'ordre 2*

Soit A une matrice carrée inversible de taille n et B une matrice colonne à n lignes.
Alors le système linéaire d'écriture matricielle $A\times X=B$ admet une unique solution donnée par la matrice colonne ……………..

Démonstration : $A\times X=B$ équivaut à $A^{-1}\times A\times X=A^{-1}\times B$, c'est-à-dire

........$\times X=A^{-1}\times B$. Donc $A\times X=B$ équivaut à …………………..

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. D'après la propriété précédente, $X=$............ .

Déterminons A^{-1} à l'aide de la calculatrice : $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{......}{......} & \frac{......}{......} \\ \frac{......}{......} & \frac{......}{......} \end{pmatrix}$.

Donc $X=.........=\begin{pmatrix} \frac{......}{......} & \frac{......}{......} \\ \frac{......}{......} & \frac{......}{......} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} ...... \\ ...... \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{......}{......}\times......+\frac{......}{......}\times...... \\ \frac{......}{......}\times......+\frac{......}{......}\times...... \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ...... \\ ...... \end{pmatrix}$.

Le système (S) a donc pour solution le couple $(x\ ;\ y)$ = (…… ; ……).

C. Lainé

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants en utilisant le calcul matriciel :

a) $\begin{cases} x+3y+z=3 \\ -x-y+z=-9 \\ -x+2y-z=12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 2x-5y-2z=2 \\ -x+4y+z=-1 \end{cases}$

Exercice 2

On donne les matrices $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la matrice M^2. On donne $M^3=\begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

2) Vérifier que $M^3=M^2+8M+6I$.

3) En déduire que M est inversible et que $M^{-1}=\dfrac{1}{6}\left(M^2-M-8I\right)$.

4) On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ passe par les points $A(1\,;\,1)$, $B(-1\,;\,-1)$ et $C(2\,;\,5)$.

a) Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Exercice 3

On considère le système $\begin{cases} 5x+4y=a \\ 10x+7y=b \end{cases}$.

1) À l'aide d'une résolution matricielle, exprimer x et y en fonction de a et b.

2) Dans un repère du plan, deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ont pour équations cartésiennes respectives $20x+16y=7$ et $10x+7y=15$.

Déduire de la question précédente les coordonnées de leur point d'intersection.

2. Représenter des transformations géométriques

Propriété 2. ***Translation et rotation***

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère deux points $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\right)$, et un vecteur $\vec{u}\left(x_{\vec{u}}\ ;\ y_{\vec{u}}\right)$.

• *B* est l'image de *A* par la translation de vecteur $\vec{u}$ si, et seulement si,
$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}.$$

• *B* est l'image de *A* par la rotation de centre *O* et d'angle θ si, et seulement si,
$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ est appelée matrice de rotation de centre *O* et d'angle θ.

Exemple : On considère dans un plan muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ le point $A\left(\sqrt{3}\ ;\ 7\right)$.

1) Déterminer les coordonnées du point *B* image de *A* par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2) Déterminer les coordonnées du point *C* image de *A* par la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 4

Pour chacun des cas suivants, déterminer l'opération matricielle associée à la transformation, puis calculer les coordonnées de l'image demandée.

a) A' est l'image de $A(3\ ;\ 7)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) B' est l'image de $B\left(\frac{1}{2}\ ;-\frac{1}{6}\right)$ par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

c) C' est l'image de $C\left(1\ ;\ \sqrt{3}\right)$ par la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

d) D' est l'image de $C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ par la rotation de centre *O* et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

C. Lainé

3. Suites de matrices colonnes

● **Exemple 1** : La suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \begin{pmatrix} n^3+1 \\ 3n+5 \end{pmatrix}$ est une suite de matrices colonnes dont les coefficients sont les suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n = n^3+1$ et $v_n = 3n+5$.

● **Exemple 2** : Soit deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par : $u_0 = 0{,}05$, $v_0 = 0{,}95$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{3}v_n + 0{,}05 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{3}v_n + 0{,}05 \end{cases}$.

On pose pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}$.

On a alors $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}95 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, la relation matricielle de récurrence :
$U_{n+1} = A\,U_n + C$.

En effet : $A\,U_n + C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{3}v_n + 0{,}05 \\ \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{3}v_n + 0{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

● **Exemple 3** : Soit une suite numérique (u_n) définie par : u_0, u_1 et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

On pose pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

On a alors $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, la relation matricielle de récurrence :
$U_{n+1} = A\,U_n$.

En effet, $A\,U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -2u_n + 3u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

Propriété 3.

Soit une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p telle que pour tout entier naturel n, on ait $U_{n+1} = A \times U_n$ où A est une matrice carrée de taille p.

Alors, pour tout entier naturel n, on a : $U_n =$ ....

Démonstration : Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = A^n \times U_0$ »

→ *Initialisation* : $A^0 \times U_0 = ... \times U_0 = ...$. Par suite, on a $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $k \geq 0$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors : $U_k = A^k \times U_0$.

$U_{k+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$. On en déduit que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :

$\mathcal{P}(0)$ et pour tout k supérieur ou égal à 0, $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$.

$\rightarrow$ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = A^n \times U_0$.

Exemple : Reprenons l' exemple 3. On souhaite calculer u_5 et u_6, sachant que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

$U_5 = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$ et d'après la propriété précédente, $U_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Or $U_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}^5 \times \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$, en utilisant la calculatrice.

Par conséquent, $u_5 = \ldots\ldots$ et $u_6 = \ldots\ldots$.

Exercice 5

Soient deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par : $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 2v_n \end{cases}$.

Calculer u_6 et v_6.

[corrigé en vidéo]

Exercice 6

Soient deux suites numériques (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$a_1 = 1$, $b_1 = 2$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{5}{2}a_n - \dfrac{3}{2}v_n \\ b_{n+1} = -\dfrac{3}{2}a_n + \dfrac{5}{2}b_n \end{cases}$.

1) Calculer a_2 et b_2.

2) Déterminer la matrice M telle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

3) Soient $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que Q est inversible, et calculer $Q \times D \times Q^{-1}$.

b) Que peut-on dire de cette matrice ?

4) Calculer la matrice Q^n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

5) Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

Définition.

Une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p congerge vers une matrice L si, et seulement si, les coefficients de (U_n) (qui sont des suites réelles) convergent vers les coefficients de L correspondants.
Dans les autres cas, la suite (U_n) diverge.

Exemple : Reprenons l'exemple 1.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+5)=......$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3+1)=.......$ Donc la suite (U_n) ....

Propriété 4. ***Convergence d'une suite de matrices colonnes***

Soit une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p telle que pour tout entier naturel n, on ait $U_{n+1}=A\times U_n+C$ où A est une matrice carrée de taille p et C une matrice colonne à p lignes.
Si la suite (U_n) converge, alors sa limite L est une matrice colonne vérifiant l'égalité $......=...............$.

Démonstration : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}A\,U_n+C=AL+C$.

Par unicité des limites, on obtient $......=.....................$.

Exemple : Reprenons l'exemple 2. Si la suite (U_n) converge, alors sa limite L sera solution de l'équation matricielle $L=AL+C$.
Résolvons cette équation : $L=AL+C$ équivaut à $L-AL=C$, soit à $(I_2-A)L=C$.
Donc $L=AL+C$ équivaut à $L=(I_2-A)^{-1}C$.

Or $I_2-A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{3}\\\frac{3}{4}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{3}\\-\frac{3}{4}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, et, $(I_2-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{3}\\-\frac{3}{4}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&\frac{4}{3}\\3&3\end{pmatrix}$.

Alors, $L=(I_2-A)^{-1}C=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&\frac{4}{3}\\3&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0{,}05\\0{,}05\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2\\0{,}3\end{pmatrix}$. Donc (U_n) converge vers $L=\begin{pmatrix}0{,}2\\0{,}3\end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit une suite (U_n) de matrices colonnes définies pour tout entier naturel n par

$U_{n+1}=A\times U_n+B$ avec $A=\begin{pmatrix}2&0{,}5\\3&-2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Rechercher, si elle existe, la suite (U_n) constante.

corrigé en vidéo