MATRICES (PARTIE 1)

Cours	Terminale maths expertes

Objectifs :
- *Effectuer des calculs sur les matrices.*
- *Calculer l'inverse d'une matrice carrée.*
- *Calculer les puissances d'une matrice carrée.*

Les matrices sont apparues en tant qu'objet mathématique bien après les systèmes linéaires, après les déterminants, et après les espaces vectoriels. Elles ont mis longtemps à s'imposer. Cayley et Sylvester qui les ont introduites et étudiées, étaient deux amis, qui ont en commun d'avoir soutenu les premières mathématiciennes à accéder aux études supérieures.

Source : Site Histoires de Mathématiques

1. Notion de matrice

Définition 1. ***Matrice***

Une matrice de taille (ou d'ordre) m x n est un tableau de nombres formé de m lignes et n colonnes.
Une telle matrice s'écrit sous la forme :

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres a_{ij} sont appelés les ……………………………………………….

On note aussi $M=\left(a_{ij}\right)_{1\le i\le m\ ;\ 1\le i\le n}$.

<u>Exemple</u> : $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre ………..

<u>Remarque</u> : Deux matrices $A=\left(a_{ij}\right)$ et $B=\left(b_{ij}\right)$ sont égales si, et seulement si, elles ont même ordre m x n et si $a_{ij}=b_{ij}$ pour tout couple (i, j) tel que $1\le i\le m$ et $1\le j\le n$.

<u>Vocabulaire</u> : • Lorsque $m=n$, on parle de **matrice ……………….**

Par exemple : $A=\begin{pmatrix} 5 & -1{,}2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

• Dans ce dernier cas, lorsque tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale, on parle **de matrice …………………………..**

Par exemple : $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

• Lorsque $n=1$, on parle de **matrice ……………………...**

Par exemple : $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

• Lorsque $m=1$, on parle de **matrice ……………………...**

Par exemple : $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

Définition 2. ***Matrice nulle et matrice identité***

• La matrice nulle est la matrice dont ………………………………… sont nuls.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle matrice identité (ou unité) d'ordre n, notée I_n, la matrice diagonale dont tous les termes diagonaux valent …………

Exemples : $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre ……….

Exercice 1

Soit $A=(a_{ij})$ la matrice à deux lignes et quatre colonnes telle que $a_{ij}=2ij$.

1) Préciser la dimension de A.
2) Quelle est la valeur de a_{13}.
3) Écrire la matrice A.

2. Opérations sur les matrices

Définition 3. ***Somme de deux matrices***

Soient A et B deux matrices de même taille.
La somme de A et B est la matrice, notée $A+B$, dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux des coefficients qui ont la même position dans A et B.

Exemple : Soient $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Alors

$$C=A+B=\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

Remarque : Il n'est possible d'additionner que des matrices **de même taille**.

Propriété 1. ***Associativité et commutativité de l'addition***

Soient A, B et C trois matrices de même taille.

- **L'addition est commutative : $A+B=$ ....**
- **L'addition est associative $(A+B)+C=$ ....**

Définition 4. ***Produit d'une matrice par un réel***

Soient A une matrice et k un nombre réel.
La produit de A par le réel k est la matrice, notée kA, dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k.

Exemple : $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ d'où $B=-2A=\begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$.

Propriétés 2.

Soient A et B deux matrices carrées de même taille, et deux réels k et k'.

a) $(k + k')A$ = ……………..

b) $k(A + B)$ = …………….

c) $(kk')A$ = …………….

Définition 5. *Produit d'une matrice carrée par une matrice colonne*

Soient A une matrice carrée de taille n et B une matrice colonne à n lignes telles que :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le produit de la matrice carrée A par la matrice colonne B est la matrice colonne à n lignes, notée A x B est égale à :

$$A\times B=\begin{pmatrix} a_{11}\times b_1+a_{12}\times b_2+a_{13}\times b_3+\dots+a_{1n}\times b_n \\ a_{21}\times b_1+a_{22}\times b_2+a_{23}\times b_3+\dots+a_{2n}\times b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\times b_1+a_{n2}\times b_2+a_{n3}\times b_3+\dots+a_{nn}\times b_n \end{pmatrix}$$

Exemple : Soient $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors $A\times B=\begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$.

Définition 6. *Produit d'une matrice ligne par une matrice carrée*

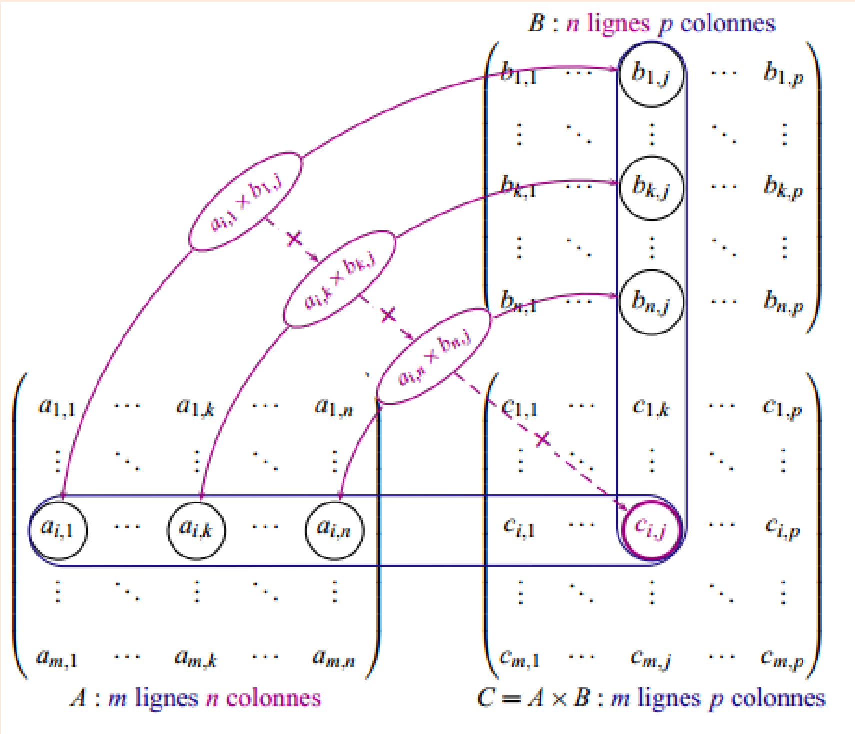
Soit A une matrice colonne à n colonnes et B une matrice carrée de taille n telles que : $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$. Alors A x B est égale à : $\begin{pmatrix} a_1\times b_{11}+\dots+a_n\times b_{n1} & a_1\times b_{12}+\dots+a_n\times b_{n2} & \dots & a_1\times b_{1n}+\dots+a_n\times b_{nn} \end{pmatrix}$

Exemple : Soient $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Alors $A\times B=(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots)=(\dots\dots \quad \dots\dots)$.

Définition 7. *Produit de deux matrices carrées*

Soient A et B deux matrices. Le produit de A et B est la matrice, notée A x B, dont les colonnes correspondent au produit de la matrice A par chaque colonne de la matrice B.



Exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ alors

$C = A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{........................} & \text{........................} \\ \text{........................} & \text{........................} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{......} & \text{......} \\ \text{......} & \text{......} \end{pmatrix}$.

De plus, $D = B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{........................} & \text{........................} \\ \text{........................} & \text{........................} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{......} & \text{......} \\ \text{......} & \text{......} \end{pmatrix}$.

Remarque : La multiplication des matrices n'est pas ………………… ; en effet, dans l'exemple précédent, …………………………

Propriétés 3.

Soient A, B et C trois matrices carrées de même taille et un réel k.

a) Associativité : (A x B) x C = ………………………………

b) Distributivité : A x (B + C) = ………………… et (A + B) x C = ……………………

c) (kA)B = A(kB) = ……………………

Définition 8. *Puissance d'une matrice carrée*

Soient A une matrice carrée et n un entier naturel non nul.
La puissance n-ième de de A, notée A^n, est la matrice définie par :
$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}}.$$
Par convention, $A^0 = I$.

<u>Exemple</u> : Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ alors

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Effectuer les calculs suivants :

a) $A + B$; b) $-\frac{1}{2}A + \frac{2}{3}B$; c) $A \times B$; d) $B \times A$; e) A^2.

Exercice 3

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1) Expliquer pourquoi le produit matriciel est bien définie.

2) Vérifier que $A \times B = \begin{pmatrix} 17 & 28 & -13 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Effectuer les opérations suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 6

1) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 4A$, puis en déduire A^3.

2) Soit $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $B^2 = 3B$, puis en déduire B^3.

3) Soit $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $C^2 = -C$, puis en déduire C^5.

C. Lainé

Méthode pour effectuer des calculs sur les matrices à l'aide d'une TI

[méthode en vidéo]

3. Matrice inverse

Propriété 4. *Produit d'une matrice par la matrice identité*

Soit A une matrice de taille n. On a : $A \times I_n = I_n \times A = ...$.

<u>Exemple</u> : Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ alors

$$A \times I_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ...... & ...... \\ ...... & ...... \end{pmatrix} = ...\ .$$

Définition 9. *Matrice inverse d'une matrice carrée*

Soit A une matrice de taille n. S'il existe une matrice B de taille n telle que $A \times B = B \times A = I_n$, alors on dit que A est .... et on note la matrice B de la façon suivante : $B = A^{-1}$.

<u>Exemple</u> : Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ alors

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ...... & ...... \\ ...... & ...... \end{pmatrix} = ...$$

et $B \times A = \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ...... & ...... \\ ...... & ...... \end{pmatrix} = ...$

Donc A et B sont ……………………….. l'une de l'autre.

Propriété 5. *Matrice inverse d'une matrice carrée d'ordre 2*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A est inversible si, et seulement si, ... $\neq 0$.

<u>Démonstration</u> : Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. D'où :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .... & ...... \\ ...... & .... \end{pmatrix} = (.........) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par suite, $A\times B=(\ldots\ldots\ldots\ldots)\times I_2$.

Si $\ldots\ldots\ldots\ldots \neq 0$, alors $\dfrac{1}{(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}A\times B=I_2$, c'est-à-dire $A\times\left(\dfrac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)B=I_2$.

D'où A est inversible et $A^{-1}=\left(\dfrac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)B$.

Si $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$, alors $A\times B=0$. Ce qui est impossible. Donc A n'est pas inversible.

Exemple : Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer A^{-1}.

Soit $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On doit obtenir : $A\times A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'où $\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots = 1 \\ \ldots\ldots\ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots = 1 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} c = \ldots\ldots\ldots \\ a = \ldots\ldots\ldots \\ d = \ldots\ldots\ldots \\ b = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$.

Par conséquent, $A^{-1}=\begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$.

corrigé en vidéo

Exercice 7

1) Soit $A=\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2) Soit $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1}.

3) Soit $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que C est inversible et déterminer C^{-1}.

Exercice 8

Soient $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que B est l'inverse de A.

Exercice 9

On pose : $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2, A^3 et A^4.
2) Conjecturer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non nul.
3) Démontrer votre conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.

Exercice 10

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $6A - A^2$.
2) En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse.

Exercice 11

Une entreprise fabrique et vend des paquets A, B et C d'un kilogramme de café moulu.

- Un paquet A contient 70% d'arabica et 30% de robusta.
- Un paquet B contient 50% d'arabica et 50% de robusta.
- Un paquet C contient 80% d'arabica et 20% de robusta.

Il y a en stock 150 kg d'arabica et 100 kg de robusta.

1) Écrire une matrice M de taille 2×3 donnant les quantités (en kilogrammes) d'arabica et de robusta présentes dans les paquets A, B et C.
2) Un certain jour, l'entreprise fabrique 25 paquets A, 40 paquets B et 35 paquets C.
   a) Écrire la matrice colonne X de sa fabrication.
   b) Calculer la matrice $M \times X$ et interpréter ses coefficients.
3) Calculer la matrice colonne S', donnant l'état du stock d'arabica et de robusta à la fin de cette journée. Interpréter les coefficients.

Exercice 12

Soit M une matrice carrée d'ordre n. (n est un entier naturel non nul)

On dit que la matrice M est nilpotente s'il existe un entier non nul p tel que M^p est la matrice nulle d'ordre n.

1) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que A et B sont des matrices nilpotentes.
   b) Calculer la matrice $S = A + B$, et, montrer que cette matrice S n'est pas nilpotente.
   c) Calculer la matrice $P = A \times B$, et, montrer que cette matrice P n'est pas nilpotente.
2) Soit N une matrice carrée d'ordre 2 telle que N^2 soit la matrice nulle d'ordre 2.
   a) Calculer le produit $(I_2 + N)(I_2 - N)$ où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.
   b) En déduire que la matrice $I_2 - N$ est inversible et déterminer son inverse.
   c) En déduire la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, puis la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.