# LES NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE

| *Cours* | *Terminale maths expertes* |
|---|---|

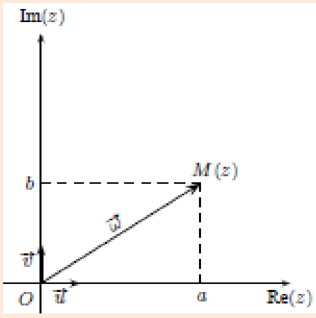
**Objectifs :**
- *Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe.*
- *Représenter un nombre complexe par un point. Déterminer l'affixe d'un point.*

Dans toute la suite de ce chapitre, le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

## 1. Représentation géométrique

**Définition 1.** ***Affixe***

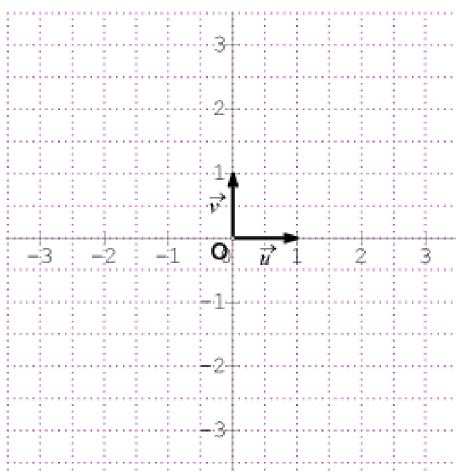
- **L'affixe d'un point *M* de coordonnées $(a\,;\,b)$ est le nombre complexe $z =$ .............**
- **L'affixe d'un vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a\,;\,b)$ est le nombre complexe $z =$ ............. .**




*Exemple* :

Placer dans le plan complexe $\mathscr{P}$, les points $M_k$ les points d'affixes $z_k$ :

$z_1 = 1+2i$ ; $z_2 = 2+i$ ; $z_3 = -1+3i$ ; $z_4 = -3i$ et $z_5 = 3i - 2$ .






*C. Lainé*

*Remarques* :

- Le point $M$ d'affixe $z$ est usuellement noté : $M(z)$.
- L'axe des abscisses est aussi appelé axe des réels.

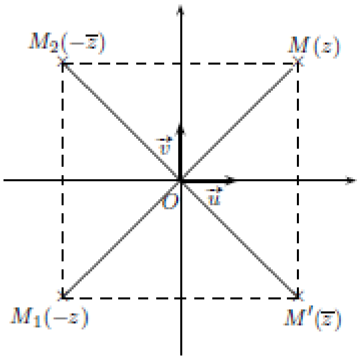
L'axe des ordonnées est appelé axe des imaginaires purs.

- On dit que le point $M$ est l'image du nombre complexe $z$ dans le plan complexe $\mathscr{P}$.
- Soit $M$ un point d'affixe $z = a + ib$.

Le point $N$ d'affixe $\overline{z}$, conjugué de $z$, est le symétrique de $M$ par rapport ……………………

…………….

Le point $Q$ d'affixe $-z$, opposé de $z$, est le symétrique de $M$ par rapport à …………




**Exercice 1**

Soit $(O\ ;\ I,\ J)$ un repère orthonormé.

1) Déterminer l'affixe des points $O$, $I$ et $J$.

2) Tracer ce repère et placer le point $A$ d'affixe $-1+2i$ et un vecteur $\vec{w}$ d'affixe $2-i$.

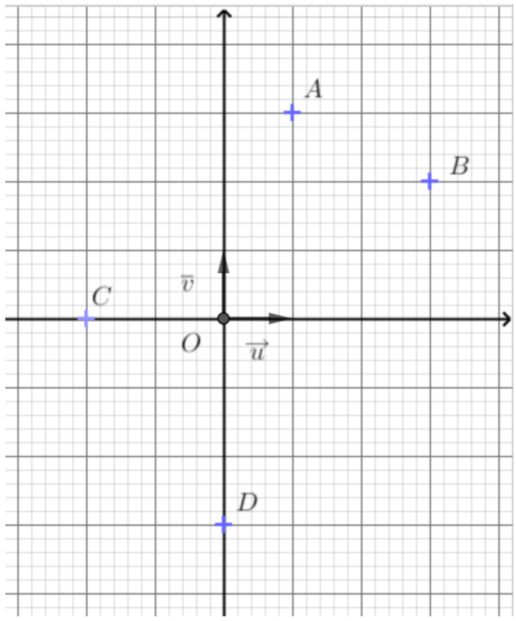
**Exercice 2**

On considère le graphique ci-contre.

1) Déterminer l'affixe des points $A$, $B$, $C$ et $D$.

2) Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

3) Placer les points $E$, $F$ et $G$ tels $z_E = -2 - i$, $z_F = -3$ et $z_G = 4i$.




**Exercice 3**

On considère le nombre complexe $z = 2 + i$.

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, placer : $A(z)$ ; $B(-z)$ ; $C(\overline{z})$ ; $D(z-3)$ et $E(z-3i)$.

**Propriétés 1.** ***Somme de deux vecteurs et du produit d'un vecteur par un réel***

**Soient $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z$ et $z'$, et $k$ un nombre réel.**

- **L'affixe du vecteur $\vec{w}+\vec{w'}$ est $z+z'$.**
- **L'affixe du vecteur $k\vec{w}$ est $kz$.**

<u>Démonstrations</u> : Soient $(a\ ;\ b)$ et $(a'\ ;\ b')$ les coordonnées des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ dans la base $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

- Le vecteur $k\vec{w}$ a pour coordonnées $(ka\ ;\ kb)$ et donc pour affixe : $ka+kbi=k\left(a+bi\right)=kz$.
- $\vec{w}+\vec{w'}$ a pour coordonnées $\left(a+a'\ ;\ b+b'\right)$ : $\left(a+a'\right)+i\left(b+b'\right)=a+ib+a'+ib'=z+z'$.

**Propriétés 2.** ***Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment***

**Soit $A$ et $B$ deux points du plan complexe d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$.**

- **L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté $z_{\overrightarrow{AB}}$, est $z_{\overrightarrow{AB}}=$................ .**
- **L'affixe du milieu du segment $[AB]$ est $\dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$.**

<u>Démonstrations</u> : • L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OB}$ est $z_B$, celle du vecteur $\overrightarrow{OA}$ est $z_A$.

$\overrightarrow{AB}=\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots-\ldots\ldots\ldots$, donc l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

• Soit $I$ le milieu de $[AB]$, appelons $z_I$ son affixe. $\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}(\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots)$ donc :

$z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

**Exercice 4**

Soient trois points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A=1-3i$, $z_B=2-i$ et $z_C=3$.

1) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Déterminer l'affixe du point $I$ milieu de $[AB]$.
3) Déterminer l'affixe du point $D$ tel que $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$.

**Exercice 5**

On considère les points $A\left(-2+3i\right)$, $B\left(2+4i\right)$, $C\left(5+3i\right)$, $D\left(1+2i\right)$ et $E\left(-7\right)$.

1) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Calculer l'affixe de son centre.
2) Les points $C$, $D$ et $E$ sont-ils alignés ?

corrigé en vidéo

**Exercice 6**

On considère les points $A\left(1+i\right)$, $B\left(2-3i\right)$ et $D\left(-2-i\right)$.

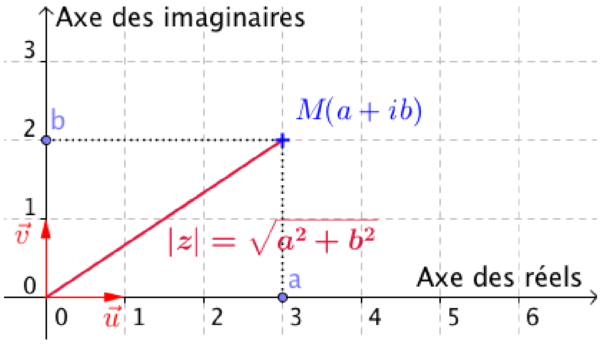
1) Déterminer l'affixe du point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2) Déterminer l'affixe de $E$ centre du parallélogramme.

## 2. Module et argument d'un nombre complexe

**Définition 2.** *Module d'un nombre complexe*

**Pour tout nombre complexe $z$ d'image $M$ dans le plan complexe, on appelle module de $z$ le nombre réel positif, noté $|z|$, défini par : $|z| = $......... .**

**Le module du nombre complexe $z = a + ib$ est : $|z| = $................ .**




*Remarque* : On en déduit immédiatement que $|z| = |......| = |......|$.

*Exemples* : $|4-3i| = ......$ ; $|i| = ......$ ; $|-3| = ......$

**Propriétés 3.** *Propriétés des modules*

**Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ :**

- $|z|^2 = ............$
- $|zz'| = ............$
- **si $z' \neq 0$,** $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{......}{......}$
- **si $n$ est un entier naturel non nul,** $|z^n| = .........$

*Démonstrations* : • Soit $z = a + ib$. Alors $z\bar{z} = ...........$ ; par suite, $|z\bar{z}| = ........... = .......$ .

• Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. $z \times z' = ................................ = ................................$

D'où $|z \times z'| = \sqrt{................................} = \sqrt{.................................................................}$

Ainsi $|z \times z'| = \sqrt{................................}$

Or $|z| \times |z'| = \sqrt{..............} \times \sqrt{..............} = \sqrt{................................} = \sqrt{................................}$

Par conséquent, $|z \times z'| = ..............$

• On procède par récurrence.
→ *Initialisation pour* $n = 2$ : $|z^2| = .......... = .......... = ......$, d'après la propriété du produit.

→ *Hérédité* : Supposons qu'il existe un entier $k$ supérieur ou égal à 2 tel que la propriété soit vraie : $\left|z^k\right| = |z|^k$. Alors $\left|z^{k+1}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$
On en déduit que la propriété est vraie au rang $k+1$.
→ *Conclusion* : La propriété est vraie pour $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n$, soit : $|z^n| = |z|^n$.

**Exercice 7**

Calculer : $\left|\sqrt{2}+i\right|$ ; $|-3i|$ ; $\left|\dfrac{-3i}{\left(\sqrt{2}+i\right)^2}\right|$.

corrigé en vidéo

**Théorème 1.** ***Distance et module***

**Soit *A* et *B* deux points du plan complexe d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$.**
***AB* = .............**

**Exercice 8**

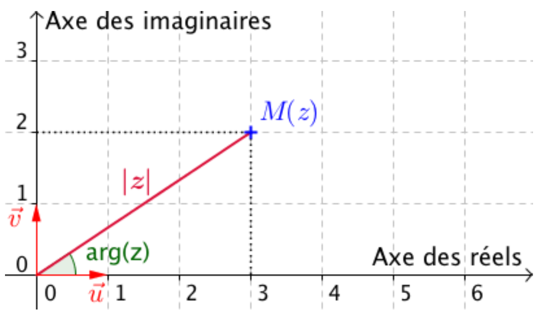
Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points $A(3-i)$, $B(-2i)$ et $C(2+2i)$.
1) Déterminer les distances *AB*, *AC* et *BC*.
2) Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle *ABC* ?

**Exercice 9**

Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, déterminer l'ensemble des points *M* d'affixe $z$ tels que : a) $|z| = 18$ ; b) $|z+2-i| = 4$ ; c) $|z-3-i| = |z+5-2i|$ ; d) $|z| = i$.

**Définition 3.** ***Argument d'un nombre complexe***

**Soit $z$ un nombre complexe non nul et *M* son image dans le plan complexe.**
**On appelle argument de $z$, noté …………, une mesure de l'angle ………………….**



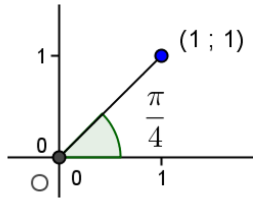



C. Lainé

*Remarques* : • Tout nombre complexe admet une infinité d'arguments : si $\theta$ est un argument de $z$ alors pour tout $k$ de $\mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ est aussi un argument de $z$. On écrit : $\arg(z) = \theta \quad [2\pi]$ ou $\arg(z) = \theta$ modulo $2\pi$.

• Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument. En effet, dans ce cas, l'angle $\left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM}\right)$ n'est pas défini.

*Exemple* : Soit $z = 1 + i$. Alors $\arg(z) = \left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.



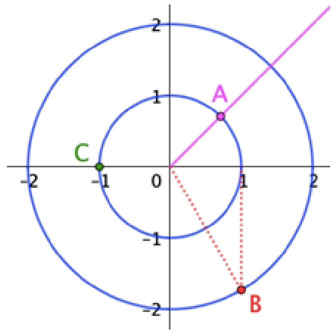

**Exercice 10**

1) Déterminer un argument de chaque affixe des points *A*, *B* et *C*.

2) Placer les points *D* et *E* d'affixes respectives $z_D$ et $z_E$ telles que :

$\rightarrow |z_D| = 2$ et $\arg(z_D) = -\dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

$\rightarrow |z_E| = 3$ et $\arg(z_D) = \dfrac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$




corrigés en vidéo

**Propriétés 4. *Propriétés des arguments***

**Soit $z$ un nombre complexe non nul :**

**• $z$ est un réel si, et seulement si, $\arg(z) =$ ...... [......]**

**• $z$ est un imaginaire pur si, et seulement si, $\arg(z) =$ ...... [......]**

**• $\arg(\bar{z}) =$ ................**

**• $\arg(-z) =$ .................**

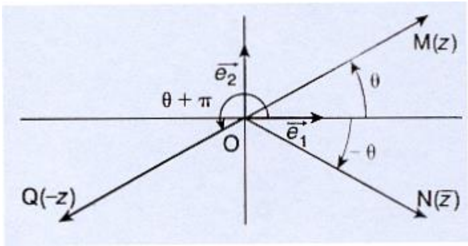
*Démonstrations* : • Le point *M* d'affixe $z$ appartient à l'axe des réels.

• Le point *M* d'affixe $z$ appartient à l'axe des ordonnées.

• Soit *M* un point distinct de *O*, d'affixe $z$. On note $\theta$ un argument de $z$.

Le symétrique *N* de *M* par rapport à l'axe des abscisses a pour affixe $\bar{z}$ d'argument ......

Un argument de l'affixe de *Q*, symétrique de *M* par rapport à *O*, est .............




**Exercice 11**

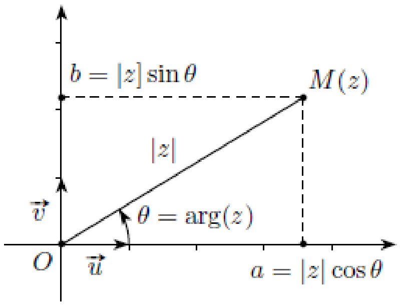
Soit $z$ un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{4}$

1) Déterminer un argument de $z$.
2) En déduire un argument de $-z$ et de $\bar{z}$.

**Théorème 2.** ***Détermination d'un argument***

**Soient $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, et $\theta$ un argument de $z$.**

**On a alors : $a = |z|\cos(\theta)$ et $b = |z|\sin(\theta)$.**




*Exemple : Déterminons un argument du nombre complexe* $z = \sqrt{3} + i$.

On calcule $|z|$ : $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

On peut donc écrire que : $\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

Par suite, un argument $\theta$ de $z$ est tel que $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$. On en déduit que $\theta = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

**Exercice 12**

Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \sqrt{3} - i$ ; b) $z_2 = 3 + 3i$ ; c) $z_3 = -2$ ; d) $z_4 = 2023$ ; e) $z_5 = \frac{7}{3}i$ ; f) $z_6 = i\sqrt{3} + 1$ ;
g) $z_7 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

**Propriétés 5.** ***Autres propriétés des arguments***

**Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls et $n$ entier naturel.**

- $\arg(z \times z') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2\pi]$
- $\arg(z^n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2\pi]$
- Si $z' \neq 0$, $\arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2\pi]$
- Si $z' \neq 0$, $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2\pi]$

**Exercice 13**

1) a) Déterminer un argument des nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = -1 - i$.

b) En déduire un argument de $z_1 \times z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ et $z_1^{\ 5}$.

2) On considère les complexes $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_4 = 1 + i$. Déterminer un argument de $\dfrac{z_3}{z_4}$.

3) On considère le complexe $z_5 = 5 - 5i$. Déterminer un argument de $z_5^{\ 500}$.

4) a) Déterminer un argument de $z_6 = 4 - 4i\sqrt{3}$.

b) En déduire un argument de $\dfrac{1}{z_6}$ et $z_6^{\ 1000}$.

5) a) Déterminer un argument de $z_7 = -2\sqrt{3} - 2i$.

b) En déduire que $z_7^{\ 3}$ est un imaginaire pur.

## 3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

**Définition 4.** ***Forme trigonométrique d'un nombre complexe***

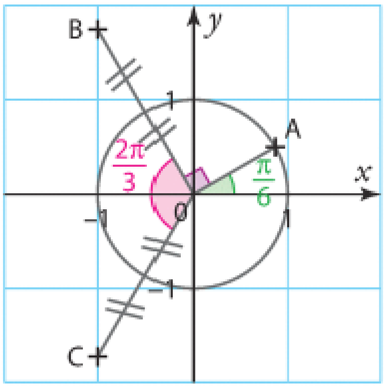
**Soit $z$ un nombre complexe non nul d'argument $\theta$.**

**L'écriture $|z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est appelée ……………………………………………… de $z$.**

<u>Exemple</u> : $\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ est la forme trigonométrique de $z = 1 + i$.

**Exercice 14**

À l'aide du graphique ci-contre, déterminer la forme trigonométrique des affixes des points *A*, *B* et *C*.




**Exercice 15**

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

a) $z_1 = 3\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right)$ ; b) $z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

[corrigés en vidéo]

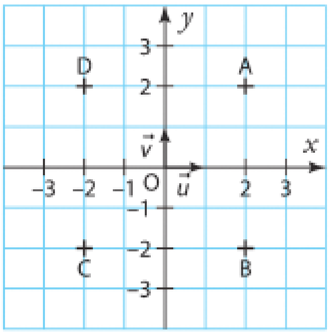
**Exercice 16**

Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

a) $z_1 = 7$ ; b) $z_2 = 4i$ ; c) $z_3 = \sqrt{3} + i$ ; d) $z_4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

**Exercice 17**

À l'aide du graphique ci-contre, déterminer la forme trigonométrique des affixes des points *A*, *B*, *C* et *D*.




**Exercice 18**

Déterminer la forme trigonométrique de $\dfrac{1}{1+i}$, de $(1+i)^4$ et de $(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)$.

**Propriété 6.** ***Argument et angle***

**Soient *A*, *B*, *C* et *D* quatre points du plan complexe d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$.**

- $\left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{AB}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2\pi] \quad (\text{si } A \neq B)$

*Démonstrations* : • $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ d'où $\left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right) \quad [2\pi]$

• $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(z_D - z_C\right) - \arg\left(z_B - z_A\right) \quad [2\pi] = \left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{AB}\right) \quad [2\pi]$

D'où $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \vec{u}\right) \quad [2\pi] = \left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}\right) \quad [2\pi]$

*Remarques* :

• Les trois points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$, avec *A* et *B* distincts, sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un réel .

• Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un nombre imaginaire pur non nul.

**Exercice 19**

Soient *A*, *B* et *C* trois points d'affixes respectives $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 2i$.
Démontrer que le triangle *ABC* est isocèle et rectangle en *A*.

corrigé en vidéo

**Exercice 20**

1) Soient *A*, *B*, *C* et *D* les points d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = 1 - i$, $z_C = -2 + i$ et $z_D = -1 + \dfrac{5}{2}i$. Montrer que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

2) Soient *E*, *F*, *G* et *H* les points d'affixes respectives $z_E = 4 + 2i$, $z_F = 2 + i$, $z_G = 2 + 2i$ et $z_H = 3$. Montrer que les droites $(EF)$ et $(GH)$ sont perpendiculaires.

**Exercice 21**

Soient *A*, *B*, *C* et *D* les points d'affixes respectives $z_A = 5$, $z_B = 2 + i$, $z_C = 3 + 4i$ et $z_D = 6 + 3i$.

a) Montrer que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

b) Déterminer l'affixe du point $I$ milieu de $[AC]$.

c) Montrer que *B*, $I$ et *D* sont alignés.

**Exercice 22**

On considère la suite $(z_n)$ définie par $z_0 = 4i$, et pour tout entier naturel $n$, $z_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \times z_n$.

On note $M_n$ le point d'affixe $z_n$. Démontrer que tous les points $M_n$ appartiennent à un même cercle de centre $O$ dont on déterminera le rayon.

**Exercice 23**

Soit $M$ un point d'affixe $z$.

Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $\arg(z-2+i) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.

corrigé en vidéo

## 4. Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

**Définition 5.** ***Ensemble*** $\mathbb{U}$

**L'ensemble des nombres complexes, dont le module est égal à ……, est noté $\mathbb{U}$.**

*Remarque* : L'ensemble des points $M$ dont l'affixe appartient à $\mathbb{U}$ est appelé …………………
……………………………………….

**Propriété 7.** ***Cercle trigonométrique***

**Soit $z = a + ib$ un nombre complexe appartenant à $\mathbb{U}$.**

**On a alors $a^2 + b^2 =$……. .**

**Exercice 24**

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$.

Démontrer que $zz'$ et $\frac{1}{z}$ appartiennent à $\mathbb{U}$, c'est-à-dire que $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse.

corrigé en vidéo