LES NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE ALGÉBRIQUE

Cours	*Terminale maths expertes*

Objectifs :
- *Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.*
- *Résoudre une équation linéaire $az = b$.*
- *Résoudre une équation simple faisant intervenir z et $\overline{z}$.*

1. Aperçu historique

➢ **Combien $x^3 + px + q = 0$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?**

Historiquement, c'est en essayant de résoudre cette équation que les mathématiciens italiens de la Renaissance, XVI^{e} siècle, surtout Cardan et Bombelli, eurent pour la première fois l'idée d'utiliser des nombres dont le carré est négatif

Mais pour cela, pour trouver des racines réelles de ces équations, ils utilisent des nombres qui ne sont pas ordinaires.
Ainsi Bombelli montre que la solution $x = 4$ de l'équation $x^3 = 15x + 4$, peut s'écrire :

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 4,$$

en remarquant (en utilisant les règles usuelles de calcul), que :

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \text{ et } \left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

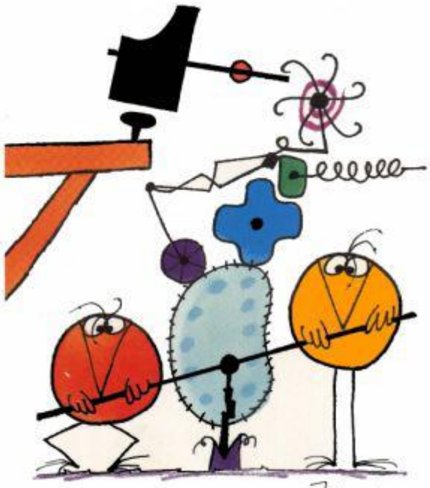
Cela permit de mettre en évidence le fait que des nombres réels peuvent être désignés par des expressions « imaginaires ». Prendre la racine carrée d'un négatif, il fallait oser ! Mais comme cette audace permet d'obtenir des résultats, les imaginaires purs sont de plus en plus utilisés avec confiance.

➢ **Comment se construit cet ensemble des nombres imaginaires ?**

L'équation $x + 2 = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$; cependant, elle en a une, $x = -1$, dans un ensemble « plus grand » $\mathbb{Z}$.
De même, l'équation $7x = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$; cependant, elle en a une, $x = \frac{1}{7}$, dans un ensemble plus grand, l'ensemble $\mathbb{Q}$.
Ensuite, l'équation $x^2 = 5$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, mais elle en a deux, $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$, dans $\mathbb{R}$.
Ainsi, lorsqu'on a essayé de résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$, qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, on a essayé de trouver un ensemble « plus grand » que $\mathbb{R}$ qui puisse contenir les solutions de cette équation.

Au milieu du XVIII^{e}, Euler (1707-1783) propose de remplacer $\sqrt{-1}$ par i, donc $i^2 = -1$; ce qui permettra de trouver des solutions de l'équation $x^2 + 1 = 0$: $x = i$ ou $x = -i$.
D''Alembert montre que tous les imaginaires inventés, que Gauss appellera plus tard les nombres complexes, sont de la forme $a + ib$ avec a et b réels.
Les réels sont des nombres complexes particuliers, ce sont eux qui s'écrivent $a + ib$, avec $b = 0$. L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est donc une extension de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Mais l'extension ne peut se faire sans réflexion, elle est soumise à certaines conditions : il faut que les opérations sur les nombres complexes, lorsqu'elles sont appliquées aux complexes particuliers que sont les réels, redonnent les résultats connus dans $\mathbb{R}$. Les définitions des opérations sur les complexes ne sont donc pas arbitraires.
C'est au cours du XIX^e siècle que les mathématiciens, Gauss surtout, donnent un statut indiscutable à ces nouveaux nombres.



2. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Définition 1. *Ensemble des nombres complexes*

Soit i le nombre « imaginaire » tel que $i^2 = -1$.
L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres de la forme $a + ib$ où a et b sont des nombres réels.

Remarque : en Sciences physiques, on utilise la lettre j.

Propriété 1. *Opérations sur nombres complexes*

L'addition et la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes obéissent aux mêmes règles de calcul que dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Exemples :

- $2 + 3i$ est un nombre complexe.
- Soit les nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$z + z' = (............) + (............) = (............) + i(............)$;

$z \times z' = (............) \times (............) = ... + i...... + i...... + i^2...... = (...............) + i(...............)$;

$z^2 = (\ldots\ldots\ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots = (\ldots\ldots\ldots\ldots) + \ldots\ldots\ldots i$.

Définition 2. ***Forme algébrique d'un nombre complexe***

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
L'écriture $a + ib$ où a et b sont des nombres réels s'appelle la forme algébrique de z.
- **a désigne .... de z, notée ....**
- **b désigne .... de z, notée ....**

Exemple : Soit $z = (3+2i)^2$
La forme algébrique de z est $z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
En effet, $(3+2i)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Donc Re(z) = …… et Im(z) = …….

Remarques :
- z est un nombre réel si et seulement si Im(z) = 0.
- Un nombre complexe est dit imaginaire pur si et seulement si Re(z) = 0.

17i est un imaginaire pur.
- Re(z + z') = Re(z) + Re(z) et Re(-z) = - Re(z).

Im(z + z') = Im(z) + Im(z') et Im(-z) = - Im(z).

Exercice 1
Simplifier les écritures en exprimant le résultat sous la forme algébrique.
a) $z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$; b) $z_2 = (3-2i)(-1+5i)$; c) $z_3 = (2-3i)^2$.

corrigés en vidéo

Exercice 2
Montrer que le nombre complexe $z = (1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i)$ est un nombre réel.

Exercice 3
Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et justifier.
Proposition 1 : « le quotient de deux nombres imaginaires purs est un nombre réel. »
Proposition 2 : « le quotient de deux nombres réels est un nombre imaginaire pur. »
Proposition 3 : « la somme de deux nombres complexes n'est jamais réelle. »
Proposition 4 : « le produit de deux nombres imaginaires purs est un nombre réel. »
Proposition 5 : « la somme de deux nombres réels est un nombre complexe. »

Exercice 4
Effectuer les calculs suivants : $A = 1 + i + i^2 + i^3$ et $B = i^{75} + i^{76} + i^{77} + i^{78}$.

Propriété 2. ***Opérations sur nombres complexes***

Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Démonstration : Cette propriété découle de l'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique.

Remarque : Comme $0 = 0 + i$, on a : $a + ib = 0$ si, et seulement si, $a = 0$ et $b = 0$.

3. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3. ***Conjugué d'un nombre complexe***

On appelle conjugué de $z = a + ib$ **le nombre complexe** $\overline{z} = a - ib$.

Exemples : $\overline{-1+2i} = \ldots\ldots\ldots$ et $\overline{i+2} = \ldots\ldots\ldots$

Remarque : Pour tout nombre complexe z, $z + \overline{z} = \ldots\ldots\ldots$ et $z - \overline{z} = \ldots\ldots\ldots$.

En effet, posons $z = a + ib$; on a : $z + \overline{z} = (\ldots\ldots\ldots) + (\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

et $z - \overline{z} = (\ldots\ldots\ldots) + (\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$.

Propriété 3.

Soit z un nombre complexe.
- **z est un nombre réel si et seulement si ……………..**
- **z est un nombre imaginaire pur si et seulement si ……………..**
- **Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. $z\overline{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.**

Démonstrations :

- z est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$.

Or $\mathrm{Im}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$. D'autre part, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$ équivaut à …………..

- z est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Or $\mathrm{Re}(z) = 0$ équivaut à $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$ équivaut à …………..

- $z\overline{z} = (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$

Exercice 5

Simplifier les écritures en exprimant le résultat sous la forme algébrique.

a) $z_1 = (2i)^{13}$; b) $z_2 = \dfrac{1}{4-2i}$; c) $z_3 = \dfrac{1+3i}{2-i}$.

corrigés en vidéo

Exercice 6

Soient $z=2+3i$ et $z'=5-2i$.

Écrire sous forme algébrique : $\overline{z}$, $\overline{z'}$, $\overline{z}+2z'$, $\overline{z}\times z'$, $\frac{1}{z}$ et $\frac{z}{z'}$.

Exercice 7

On considère le nombre complexe $z=\frac{8+i}{9-2i}$.

a) Déterminer la forme algébrique de z.

b) En déduire, sans calculer, la valeur de $\frac{8+i}{9-2i}+\frac{8-i}{9+2i}$ et de $\frac{8+i}{9-2i}-\frac{8-i}{9+2i}$.

Exercice 8

Pour tout nombre complexe z, on considère le nombre complexe $Z=z^2+3+\overline{z}^2+z\times\overline{z}$.
Montrer que Z est un réel.

Exercice 9

Pour tout nombre complexe z, on pose $Z=\frac{z+1}{\overline{z}+1}$.

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tel que le nombre Z soit :
a) réel ;
b) imaginaire pur.

Propriétés 4.

Soient z et z' deux nombres complexes et n un entier naturel non nul.

- $\overline{\overline{z}}=z$ • $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ • $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$ • $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$ **avec z' non nul** • $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ **avec z' non nul**

Démonstrations : • Soit $z=a+ib$. $\overline{z}=a-ib$ et $\overline{\overline{z}}=\overline{a-ib}=a+ib=z$.

• Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$.

$\overline{z+z'}=\overline{(a+a')+i(b+b')}=(a+a')-i(b+b')=(a-ib)+(a'-ib')=\overline{z}+\overline{z'}$.

• Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$.

$\overline{z\times z'}=\overline{(aa'+iab'+iba'-bb')}=(aa'-bb')-i(ab'+ba')$.

$\overline{z}\times\overline{z'}=(a-ib)\times(a'-ib')=aa'-iab'-iba'-bb'=(aa'-bb')-i(ab'+ba')$.

Donc $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.

• $\overline{\left(z'\times\frac{1}{z'}\right)}=\overline{1}=1$ d'où $\overline{z'}\times\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=1$. Par suite, $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$.

• $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\overline{\left(z\times\frac{1}{z'}\right)}=\overline{z}\times\frac{1}{\overline{z'}}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Exercice 10

Déterminer le conjugué des nombres suivants (exprimer le résultat sous la forme algébrique).

a) $z_1 = (2-i)(i-5)$; b) $z_2 = \dfrac{3+2i}{i}$.

corrigés en vidéo

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $3z-6=4i+z$; b) $3z-2=\overline{z}+1$.

corrigés en vidéo

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $8z+5i=4-z+i$; b) $2i+3z=i(5-iz)$; c) $2z-4=5i+4\overline{z}$; d) $\overline{z}-1=z\overline{z}-i$.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations $\begin{cases} 2z+z'=5i \\ z-2iz'=4 \end{cases}$.

Exercice 14

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0=0 \\ z_{n+1}=\dfrac{1}{2}iz_n+5 \end{cases}.$$

Soient $z_A=4+2i$ et (u_n) la suite telle que $u_n=z_n-z_A$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}iu_n$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n=\left(\dfrac{1}{2}i\right)^n\times(-4-2i)$.

Exercice 15

On considère la suite (z_n) définie par $z_0=1-i$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_{n+1}=\dfrac{1}{z_n}$.

1) Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2.
2) Conjecturer l'expression de z_n en fonction de n.
3) Démontrer la conjecture précédente par récurrence.

4. Formule du binôme de Newton

Théorème. ***Formule du binôme de Newton***

Pour tous nombres complexes a et b, et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Démonstration : Utilisons le principe du raisonnement par récurrence.

→ *Initialisation* : Comme $(a+b)^0 = ...$ et que $\binom{0}{0}a^0b^0 = ...$, alors on a bien $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $k \geq 0$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors :

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k.$$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b) \times \left(\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right)$$

$$(a+b)^{k+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(a+b)^{k+1} = ...a^{k+1} + [......+......]a^kb^1 + [......+......]a^{k-1}b^2 + \ldots + [......+......]ab^k + ...b^{k+1}$$

Or $\binom{k}{0} = \binom{k}{k} = ...$; alors

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + [......+......]a^kb^1 + [......+......]a^{k-1}b^2 + \ldots + [......+......]ab^k + b^{k+1}$$

D'après la formule de Pascal, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Par suite, $(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + ...a^kb^1 + ...a^{k-1}b^2 + \ldots + ...ab^k + b^{k+1}$, ou encore

$$(a+b)^{k+1} = ...a^{k+1} + ...a^kb^1 + ...a^{k-1}b^2 + \ldots + ...ab^k + ...b^{k+1}$$

On en déduit que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

→ La propriété est vraie pour $k = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Exercice 16

Développer l'expression $(z+5)^6$.

corrigé en vidéo

Exercice 17

Développer les expressions suivantes : $A=(1+i)^3$; $B=(2+3i)^5$ et $C=(x-1)^6$.