DIVISIBILITÉ ET CONGRUENCES	
Cours	*Terminale maths expertes*

Objectifs :
- *Déterminer les diviseurs d'un entier.*
- *Résoudre une congruence $ax \equiv b\ [n]$.*
- *Établir et utiliser des tests de divisibilité.*

1. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition 1. ***Multiples et diviseurs d'un entier relatif***

Soient a et b deux entiers. On dit que a divise b si, et seulement s'il existe un ……………. tel que ……………. On dit aussi que a est un diviseur de b.

On dit encore que b est un multiple de a.
a divise b s'écrit $a \backslash b$.

Exemples : • 6 divise 42 car ………………. avec ……………. ; 6 est un diviseur de 42, et 42 est un multiple de 6.

- -8 est un diviseur de 72, car ……………………….
- Pour tout entier relatif k, $7k \neq 22$, alors donc 7 …………………….. de 22.
- 0 ne divise aucun nombre sauf lui-même !
- Tout nombre divise 0.

Remarque : La définition ci-dessus conduit à écrire, lorsque a et b sont non nuls, les deux équivalences suivantes : « a est multiple de b » équivaut à « b est diviseur de a » équivaut à « il existe q entier tel que $a = bq$ ».

Propriété 1. ***Diviseurs***

- **…… divise a et …… divise a pour tout entier a.**
- **Si a divise b et b divise c, alors a divise …… ; on dit que la relation de divisibilité est transitive.**
On peut aussi énoncer : si b est un multiple de a et si c est un multiple de b, alors c est un multiple de a.
- **Si a divise b et m est entier, alors a divise ………..**
- **Si a divise b et a divise c, alors a divise ………………, où m et n sont des entiers quelconques.**

Démonstrations :

• …… divise a car ………….. et …… divise a car …………...

• Si a divise b et b divise c, alors il existe des entiers k et k' tels que $b = ka$ et $c = k'b$.

On en déduit $c = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$. Comme $k'k$ est un ………….. en tant que produit de deux entiers, on en déduit que …… divise c.

• Si a divise b, alors il existe un entier k tel que $b = ka$.

Alors, $mb = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$, soit a divise ………, car mk est un ……………..

• Si a divise b et a divise c, alors il existe des entiers k et k' tels que $b = ka$ et $c = k'a$.

Donc $mb + nc = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$. Le nombre $mk + nk'$ est un …………… comme somme de produit d'entiers, donc a divise …………………..

Exemples : • 3|12 et 12|36 donc ……|…...

• Soit un entier relatif N qui divise les entiers relatifs n et $n+1$.

Alors N divise ………………….. Donc $N = \ldots\ldots$ ou $N = \ldots\ldots$.

Exercice 1

Démontrer que, pour tout entier relatif n, le nombre $6n+5$ n'est pas divisible par 3.

corrigé en vidéo

Exercice 2

Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n+5$ divise $n-1$.

corrigé en vidéo

Exercice 3

Déterminer les nombres entiers naturels n tels que n divise $n+3$.

Exercice 4

Déterminer les nombres entiers naturels n tels que $2n-5$ divise 6.

Exercice 5

Déterminer les entiers x et y tels que $x^2 - y^2 = 9$.

Exercice 6

Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

2. Division euclidienne

Propriété 2. *Division euclidienne*

Soit a un entier naturel non nul, il existe un unique entier q et un unique entier r tels que $a = \ldots\ldots\ldots\ldots$, avec $0 \leq r < b$.

Démonstration : • ***Existence***
On considère les multiples de b : …, - kb, - $(k - 1)b$, …, - $2b$, - b, 0, b, $2b$, …, kb, $(k + 1)b$, … avec k entier naturel non nul.

→ Si a un multiple de b dans $\mathbb{Z}$, a est un élément de la liste ci-dessus et il existe un entier relatif q tel que : $a = bq$ (1).

→ Si a n'est pas un multiple de b dans $\mathbb{Z}$, il existe des multiples de b inférieurs à a et d'autres supérieurs à a. Soit bq le multiple de b immédiatement inférieur à a, on peut écrire : $bq < a < b(q + 1)$ (2).
On réunit les cas (1) et (2) en un seul par la double inégalité : $bq \leq a < b(q + 1)$.
La double inégalité $bq \leq a < b(q + 1)$ équivaut à $0 \leq a - bq < b$.
Posons $r = a - bq$, on obtient $a = b.q + r$ avec $0 \leq r < b$.

• ***Unicité***
Démontrons que l'écriture obtenue est unique.
Supposons qu'il existe q et r d'une part, q' et r' d'autre part tels que : $a = b.q + r$ (3) avec $0 \leq r < b$ et $a = b'.q' + r'$ (4) avec $0 \leq r' < b'$.
Supposons de plus, par exemple, qur $r' > r$. Des relations (3) et (4), on déduit que $r' - r = b.(q' - q)$ (5).
La relation (5) et $r' > r$ signifie que $r' - r$ est un multiple non nul de b. Or, c'est impossible puisque $0 \leq r < r' < b$; par suite, $r' - r$ est nécessairement nul donc $r' = r$ et $q' = q$

Définition 2. *Division euclidienne*

Soient a un entier relatif et b un entier naturel non nul.
• Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est déterminer q et r tels que :

$a =$ .... avec $0 \leq r < b$.

• Les entiers a, b, q et r sont appelés respectivement ………………..., ……………., ……………… et ……………… de la division euclidienne.

Exemples : • $65 \times 22 < 1473 < 65 \times 23$. On a : $1473 = 65 \times 22 + 43$.
• $65 \times (-23) < -1473 < 65 \times (-22)$. On a : $-1473 = 65 \times (-23) + 22$.

Remarques : • Si $0 \leq a < b$, le quotient est nul et le reste est égal à a.

• Si le reste est nul, le nombre a est multiple de b et q s'appelle alors **quotient exact** de a par b.

Propriété 3.

• b divise a si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de a par b est ………..

• On peut étendre le théorème au cas où a est un entier et b entier non nul :

il existe un unique entier q et un unique entier r tels que $a =$ .... , avec $0 \leq r < |b|$.

C. Lainé

Exemple : $19=(-5)\times\ldots\ldots+\ldots\ldots$, avec $0\leq\ldots\ldots<5$, donc la division euclidienne de 19 par -5 a pour quotient …… et pour reste ……..

Exercice 7

Déterminer le quotient et le reste de la division de $-5\ 000$ par 17.

corrigé en vidéo

Exercice 8

1) Déterminer à la main (comme à l'école primaire) la division euclidienne de 94 837 par 23.
2) En utilisant des instruction Python, déterminer la division euclidienne 598 578 641 par 91 875.

Pour deux entiers a et b :
• $a//b$ renvoie le quotient de la division euclidienne de a par b (à ne pas confondre avec a/b, qui renvoie le résultat de la division décimale de a par b) ;
• $a\%b$ renvoie le reste de la division euclidienne de a par b.

Exercice 9

Déterminer le quotient et le reste de la division de $5n+11$ par $2n+3$, où n est un entier naturel.

corrigé en vidéo

Exercice 10

Le reste de la division euclidienne de 557 par l'entier naturel b est 89.
Déterminer les valeurs possibles de b et du quotient.

Exercice 11

La différence entre deux entiers naturels est 538. Si on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers ?

Exercice 12

Le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à 5 et 4. Le quotient et le reste de la division euclidienne de $a+65$ par b sont respectivement égaux à 14 et 6. Déterminer a et b.

Propriété 4.

Soit un entier naturel b tel que $b\geq 2$.
Alors, tout entier n s'écrit sous l'une des formes suivantes :

…… ou ……….. ou ………….. ou … ou …………….. , où q est un entier relatif.

Exemples : • Tout nombre entier s'écrit de la forme …….. (nombres pairs) ou ……… (nombres impairs), avec k entier.

• Tout nombre entier s'écrit de la forme ……… ou ……… ou ………, avec k entier.

Exercice 13

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $n(n+5)(n-5)$ est divisible par 3.

[corrigé en vidéo](#)

Exercice 14

Montrer que tout entier n non divisible par 5 a un carré de la forme : $5p+1$ ou $5p-1$ (avec p entier).

Exercice 15

On cherche à déterminer l'ensemble des nombres entiers n tels que n^2-3n+6 soit divisible par 5.

1) Montrer cela revient à déterminer l'ensemble des entiers n tels que n^2-3n+1 soit divisible par 5.

2) En déduire que le reste de la division euclidienne de $n(n-3)$ par 5 doit être égal à 4.

3) Compléter le tableau suivant et conclure.

n	Reste de la division euclidienne de n par 5	$n-3$	Reste de la division euclidienne de $n-3$ par 5	Produit des restes	Reste de la division euclidienne de $n(n-3)$ par 5
$5k$					
$5k+1$					
$5k+2$					
$5k+3$					
$5k+4$					

Exercice 16

Compléter la fonction Python ci-dessous qui détermine, pour un entier naturel n, la liste ordonnée de ses diviseurs naturels.

Algorithme en pseudo-code	Codage en Python

Saisir un entier naturel n
$\mathtt{l} \leftarrow [1; n]$
Pour d allant de 2 à n − 1
    Si . . . .
        On ajoute d dans la liste l
Renvoyer la liste l rangée dans l'ordre croissant
	`def liste_des_diviseurs(n) :`
	`    l=[1,n]`
	`    for d in range(2,n) :`
	`        if ............. :`
	`            l+=[d]`
	`    return(sorted(l))`

3. Congruences dans $\mathbb{Z}$

Lorsque la trotteuse d'une montre à aiguilles réalise un tour de …… secondes, elle revient à son point de départ. Elle a effectué un cycle de …… secondes. On ne peut pas pour autant dire que 60 est égal à 0 !!!

On dira que « 60 est congru à 0 modulo 60 » et on note : 60 ≡ 0 mod 60 ou 60 ≡ 0 (60) ou 60 ≡ 0 [60].

De même imaginons que nous sommes au mois d'avril, soit au 4ème mois de l'année.
Pour savoir à quel mois nous serons dans 18 mois, on prendra en compte qu'une année correspond à un cycle de …… mois. Tous les …… mois on revient au mois initial.
Si on ajoute 18 mois au 4ème mois de l'année, on devrait se trouver au ……ème mois de l'année mais dans un cycle de …… mois, on a : $12 \equiv 0 \bmod 12$ ou $12 \equiv 0\ (12)$ ou $12 \equiv 0\ [12]$.
Et donc $22 \equiv$ …… [12] ; 18 mois après le mois d'avril, on se retrouve donc au ……ème mois de l'année suivante soit au mois d'octobre.

Exercice 17
Quel jour de la semaine sommes-nous 50 jours après le lundi de Pâques ?

Définition 3. ***Congruence***

Soit n un naturel non nul. On dit que a et b sont congrus modulo n si, et seulement si, a et b ont même …………… dans la division euclidienne par n.

On note : $a \equiv b\ [n]$, ou bien $a \equiv b$ (modulo n), ou bien $a \equiv b\ (n)$.

Exemple : $25 \equiv 14\ [11]$, car le reste de la division de 25 et 14 par 11 est le même : ……
De même : $25 \equiv$ …… [11].

Propriété 5. ***Lien entre congruence et divisibilité***

Soient a et b deux entiers et n un naturel non nul.
a et b sont congrus modulo n si, et seulement si, $a - b$ est ………………… par n.

Démonstration : • Supposons que a et b aient le même reste r dans la division euclidienne par n.
Donc : $a = nq + r$ et $b = nq' + r$, avec q et q' entiers et $0 \leq r < n$.
Alors : $a - b = n(q - q')$.
Comme $q - q'$ est un entier, on en déduit que $a - b$ est divisible par n.

• Réciproquement : supposons à présent que $a - b$ est divisible par n. Il existe k entier tel que $a - b = kn$. Soit r le reste de la division euclidienne de b par n. On a donc l'égalité :
$b = nq + r$, avec q entier et $0 \leq r < n$.
Alors : $a = b + kn = nq + r + kn = (q + k)n + r$, avec $0 \leq r < n$.
Puisque $q + k$ est un entier, ceci prouve que la division euclidienne de a par n donne pour quotient $q + k$ et pour reste r.
D'où a et b ont bien même reste dans la division euclidienne par n.

Exemple : $25 \equiv 14\ [11]$, car $25 - 14 =$ …… et ………… est divisible par 11.

Exercice 18

Compléter : $12 \equiv$ …… [10] ; $20 \equiv$ …… [8] ; $6 \equiv$ …… [7] ; $105 \equiv$ …… [26] ; $-15 \equiv$ …… [60] ; $4\times n \equiv$ …… $[n]$; $2\times n+3 \equiv$ …… $[n]$; $n^2-3\times n+8 \equiv$ …… $[n]$.

Exercice 19

Démontrer que $214 \equiv 25\ [9]$.

corrigé en vidéo

Propriétés 6. ***Congruences***

Soient a, b et c des entiers, et n un entier naturel non nul.

• $a \equiv$ …… $[n]$.

• Si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$, alors $a \equiv$ …… $[n]$; on dit que la relation de congruence modulo n est transitive.

Démonstrations : • a et a ont bien le même reste dans la division euclidienne par n.

• Si a et b ont même reste dans la division euclidienne par n et b et c aussi, alors a et c ont même reste dans la division euclidienne par n.

Propriétés 7. ***Opérations comptables avec la congruence***

Soit n un entier naturel non nul.
Soient a, b, c et d des entiers tels que $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$.

• $a+c \equiv$ …… + …… $[n]$.

• $a \times c \equiv$ …… × …… $[n]$.

• $a^p \equiv$ …… $[n]$, avec p entier naturel.

On dit que l'addition, la soustraction et la multiplication sont compatibles avec les congruences.

Exemples : On a : $7 \equiv 4\ [3]$ et $11 \equiv 20\ [3]$ donc :

• $7+11 \equiv$ …..+…… [3] $\equiv$ …… [3] $\equiv$ …… [3] et on a alors $18 \equiv$ …… [3]

• $7\times 11 \equiv$ ……×…… [3] $\equiv$ …… [3] $\equiv$ ….. [3] et on a alors $77 \equiv$ …… [3]

Exercice 20

Compléter le tableau suivant :

a	$\equiv 1\ [4]$	$\equiv -1\ [7]$	$\equiv 1\ [10]$
b	$\equiv 2\ [4]$	$\equiv 4\ [7]$	$\equiv -5\ [10]$
$a+b$	$\equiv \cdots\ [4]$	$\equiv \cdots\ [7]$	$\equiv \cdots\ [10]$
$a-b$	$\equiv \cdots\ [4]$	$\equiv \cdots\ [7]$	$\equiv \cdots\ [10]$
a^2	$\equiv \cdots\ [4]$	$\equiv \cdots\ [7]$	$\equiv \cdots\ [10]$
$4b$	$\equiv \cdots\ [4]$	$\equiv \cdots\ [7]$	$\equiv \cdots\ [10]$
a^2+4b-6	$\equiv \cdots\ [4]$	$\equiv \cdots\ [7]$	$\equiv \cdots\ [10]$

corrigé en vidéo

Exercice 21

Montrons que le produit de deux entiers consécutifs est divisible par 2.

Exercice 22

Déterminons le reste dans la division euclidienne de 5^{1789} par 3.

Exercice 23

Déterminons le chiffre des unités de 2003^{2003}.

Exercice 24

Montrer que, pour tout entier naturel n, $16^{2n+1}+18^n$ est divisible par 17.

Exercice 25

Déterminer le reste de la division euclidienne de 50^{100} par 7.

Exercice 26

1) Démontrer, par disjonction de cas, que pour tout entier naturel n, $3n^3+5n+1$ est impair.
2) En déduire que ce nombre n'est jamais divisible par $n(n+1)$.

Exercice 27

1) Déterminer le reste de la division euclidienne par 3 de 2^n, n étant un naturel.
2) En déduire le reste de la division par 3 de 2^{14607}.

Exercice 28

Déterminer les entiers n tels que l'entier $N=n^2-3n+6$ soit divisible par 5.

Exercice 29

Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $6+x\equiv 5\ [3]$.

corrigé en vidéo

Exercice 30

Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $3x\equiv 5\ [4]$.

corrigé en vidéo

Exercice 31

1) Compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1	2	3	4	5	6
reste de $3x$ modulo 7							

2) Trouver un entier m tel que $3m \equiv 1\ [7]$.

On dit que ce nombre m est un inverse de 3 modulo 7, car $3 \times m$ est congru à 1 modulo 7.

Exercice 32

On considère l'équation diophantienne (E) : $4x^2 + 3y^2 = 11$4x2 + 3y2 = 11, où l'inconnue est le couple d'entiers $(x\ ;\ y)$.

1) Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est un couple solution, alors $4x^2 \equiv 2\ [3]$.

2) Résoudre l'équation (E).