Segments de longueurs irrationnelles

Soit n un entier positif.
Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on considère les points A (1 ; 0) et B(n ; 0).

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure

2. Construire le point C d'ordonnée positive tel que :
   - OBC soit un triangle rectangle en C ;
   - A soit le point d'intersection de la hauteur issue de C dans le triangle OBC avec le segment [OB].

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure

3. Faire afficher les longueurs AB, AC ainsi que le nombre AC^2. Faire une conjecture sur ce nombre.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture

4. En utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles OAC, OCB et ABC, démontrer la conjecture faite au 3.

Carrés d'entiers particuliers

Le but de cet exercice est d'établir une propriété permettant de calculer facilement le carré d'un entier positif n dont le chiffre des unités est 5.
Un tel entier peut s'écrire $n = 10\,d + 5$, où d est un entier positif.

1. En utilisant un tableur, calculer, pour d variant de 0 à 8, les nombres $10d + 5$.

Appeler l'examinateur pour une vérification des résultats obtenus

2. Calculer, toujours pour d variant de 0 à 8, les nombres $(10d+5)^2$ et $d(d+1)$. Quelle conjecture peut-on faire ?

Appeler l'examinateur pour une vérification des résultats obtenus et de la conjecture

3. Le résultat conjecturé est-il vrai? L'énoncer et le démontrer.

Égalité d'aires

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 8 et AD = 10.
Pour tout point M du segment [AB], on considère le point J du segment [AD] et le point I tels que AMIJ soit un carré.
On appelle H le point d'intersection des droites (IJ) et (BC) et K le point d'intersection des droites (MI) et (CD).
Le but de l'exercice est de chercher les positions du point M pour lesquelles la somme des aires des quadrilatères AMIJ et CKIH soit égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD.

5. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure

6. Faire afficher les distances AM, IH et IK ainsi que les aires des quadrilatères AMIJ et CKIH. Faire varier M sur le segment [AB] et faire une conjecture sur les positions du point M qui semble convenir au problème.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture

7. On note x la longueur du segment [AM].
   a. Exprimer en fonction de x l'aire du carré AMIJ.
   b. Quelle est la nature du quadrilatère CKIH. Exprimer son aire en fonction de x.
   c. Traduire le problème par une équation d'inconnue x.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de l'équation

   d. Montrer que cette équation s'écrit $(x-4)(x-5)=0$ et vérifier la conjecture faite au 2.

Sur un cercle

On considère un triangle ABC et son cercle circonscrit $\mathcal{C}$.
Soit H son orthocentre (point de concours de ses hauteurs) et soit A' le milieu du segment [BC].

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure

2. Construire le point E, symétrique de H par rapport à A' puis tracer le quadrilatère HCEB.
   Quelle conjecture peut-on faire sur le point E ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture

3. *a.* Déterminer la nature du quadrilatère HCEB.
   b. En déduire la nature des triangles ABE et ACE.
   c. Conclure.

Un cube ou presque

On se propose de déterminer les nombres entiers naturels n pour lesquels $\left(n^3-1\right)$ est un multiple de $\left(n-1\right)$.

8. À l'aide d'un tableur, faire apparaitre les restes des divisions euclidiennes de $\left(n^3-1\right)$ par $\left(n-1\right)$ pour tous les entiers n compris entre 2 et 100. Qu'observe-t-on ?

Appeler l'examinateur pour une vérification

9. Développer, pour tout entier naturel n, le produit $A(n)=\left(n-1\right)\left(n^2+n+1\right)$.

Appeler l'examinateur pour une vérification

10. Montrer de même que, pour tout entier naturel n, $\left(n^3+1\right)$ est un multiple de $\left(n+1\right)$. Comment s'exprime, en fonction de n, le quotient de $\left(n^3+1\right)$ par $\left(n+1\right)$?

Résolution graphique d'une équation

On associe à tout nombre x le nombre $A(x)$ défini par $A(x)=16x^2-136x+225$. On cherche à savoir si l'équation $A(x)=0$ possède des solutions.

1. À l'aide d'une feuille de calcul, calculer automatiquement $A(x)$ pour toutes les valeurs entières de x comprises entre -10 et 10. Représenter graphiquement le tableau de valeurs obtenu.

> Appeler l'examinateur et lui montrer la formule saisie
> et le tableau de valeurs obtenu

2. L'équation $A(x)=0$ semble-t-elle posséder des solutions ? Semble-t-elle posséder une solution comprise entre 2 et 3 ?
3. À l'aide d'une feuille de calcul, calculer automatiquement $A(x)$ pour les nombres 2 , $2{,}05$, $2{,}1$, ... $2{,}9$, $2{,}95$, 3. Représenter graphiquement le tableau de valeurs obtenu.

> Appeler l'examinateur et lui montrer le tableau de valeurs obtenu

4. On pose, pour tout nombre x : $B(x)=(4x-17)^2-64$.
Montrer que, pour tout nombre x, $A(x)=B(x)$.
5. Résoudre l'équation $A(x)=0$

Détermination d'un lieu géométrique

On considère un point O du plan et un nombre réel positif R. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon R. On considère un point A situé à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$. À tout point B appartenant au cercle $\mathcal{C}$, on associe le point I, milieu de la corde d'extrémité B passant par A.

On souhaite préciser la figure $\mathcal{F}$ sur laquelle le point I se déplace lorsque le point B parcourt le cercle $\mathcal{C}$.

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour faire la figure.

> Appeler l'examinateur et lui montrer la figure. Avec son aide, représenter l'ensemble $\mathcal{F}$.

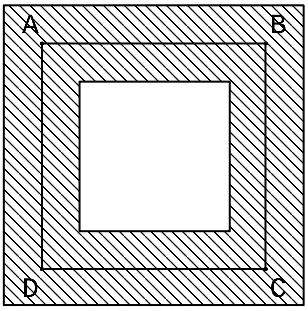
2. Préciser la position relative des droites (OI) et (BA).
3. En déduire la nature de la figure $\mathcal{F}$.

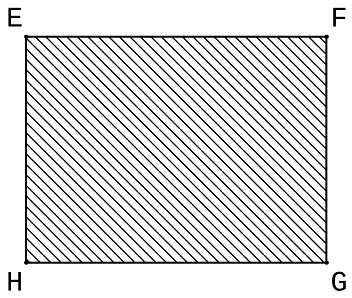
> Appeler l'examinateur pour vérification

4. Reprendre le logiciel de géométrie et étudier le problème obtenu en supprimant l'hypothèse « situé à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ ».

> Appeler l'examinateur pour vérification

Domaines de même aire





Soit a un nombre supérieur strictement à 2.
Sur la première figure ci-dessus, on considère un carré ABCD de côté de longueur a. Il est inclus dans un carré dont le côté mesure $(a+2)$ et contient un carré dont le côté mesure $(a-2)$. D'autre part on considère un rectangle EFGH tel que EH = a.
Le but de l'exercice est de déterminer la longueur du côté [EF] telle que les deux domaines hachurés aient la même aire.

1. Exprimer, en fonction de a, l'aire de chacun des carrés de la première figure puis l'aire A_1 de la partie hachurée ainsi que l'aire A_2 du rectangle EFGH.

Appeler l'examinateur pour une vérification des résultats obtenus

2. En utilisant un tableur, calculer les nombres A_1 et A_2 pour a variant de 1 à 15 et faire une conjecture.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture

3. Démontrer cette conjecture.

Un invariant géométrique

On considère un triangle isocèle ABC de sommet principal A, et un point M appartenant au côté [BC]. On note J et K les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur (AB) et (AC).

1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie. Afficher la somme MJ + MK.

Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle

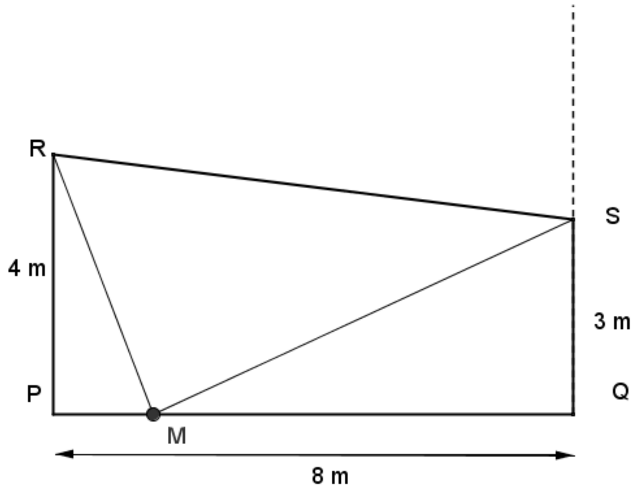
2. La somme MJ + MK varie-t-elle lorsqu'on déplace le point M sur le segment [BC] ? La comparer à la longueur de la hauteur [CD] du triangle ABC.

Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle

3. Établir le résultat conjecturé à la question précédente. On pourra pour cela considérer le pied N de la perpendiculaire abaissée de M sur (CD) et montrer que CN = MK. On pourra se limiter au cas où l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

À la recherche d’un angle droit

On considère un trapèze rectangle PQSR, dont les dimensions sont données sur la figure ci-dessous. On se demande s’il est possible de choisir un point M sur le segment [PQ] de telle sorte que l’angle $\widehat{\mathrm{SMR}}$ soit droit.



1. Faire une figure à l’aide d’un logiciel de géométrie. Afficher la mesure de l’angle $\widehat{\mathrm{SMR}}$. Combien de points M semblent répondre au problème posé ?

Appeler l’examinateur pour une vérification et une aide éventuelle

2. En notant x la longueur du segment [PM], écrire la condition exprimant que le triangle SMR est rectangle en M.

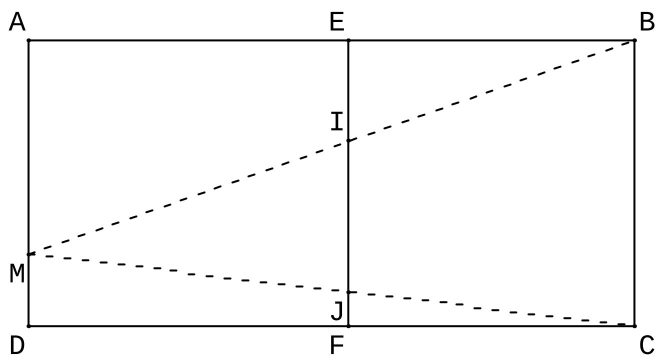
Appeler l’examinateur pour une vérification de l’équation obtenue.

3. Montrer que l’équation d’inconnue x obtenue peut s’écrire : $(x-4)^2-4=0$.
La résoudre et comparer le résultat au résultat de l’étude graphique.

4. La longueur du segment [QS] est à présent variable. Déterminer graphiquement la valeur de cette longueur à partir de laquelle le problème n’a plus de solution. Interpréter.

Étude d'une longueur

Soit ABCD un rectangle tel que AB = 9 et BC = 4.
On construit alors le carré BEFC « intérieur » au rectangle comme dans la figure ci-dessous.



Pour tout point M du segment [AD], on appelle I le point d'intersection des droites (MB) et (EF) et on appelle J le point d'intersection des droites (MC) et (EF).

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure

2. Afficher la distance IJ. Quelle conjecture peut-on faire ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture

3. On appelle H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle MBC et K le point d'intersection de la droite (MH) avec le segment [EF].
   Quelle fraction de l'aire du triangle MBC représente l'aire du triangle MIJ ?
   Conclure.

Figures de Varignon

On considère un quadrilatère ABCD. On appelle I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie. Quelle semble être la nature du quadrilatère IJKL ?

Appeler l'examinateur et lui montrer la figure. Lui exposer la conjecture faite.

2. Écrire les étapes de la démonstration établissant le résultat conjecturé.

3. On se donne les points A, B et D. Est-il possible de placer le point C de telle sorte que le quadrilatère IJKL soit un rectangle ? Un losange ? Un carré ? Réaliser des figures répondant à la question.

Appeler l'examinateur pour vérification

De quart en quart

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point fixé de ce cercle.
Pour tout point M de $\mathcal{C}$, on considère :

- le point I du segment [AO] tel que $AI = \frac{1}{4}AO$;
- le point J du segment [AM] tel que $AJ = \frac{1}{4}AM$.

Le but de l'exercice est d'étudier la figure décrite par le point J lorsque M parcourt le cercle $\mathcal{C}$.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure

2. Faire varier M sur le cercle $\mathcal{C}$ et faire une conjecture sur l'ensemble décrit par le point J.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture

3. Exprimer la distance IJ en fonction de la distance OM. Conclure.

Parallélogramme

Soit ABCD un quadrilatère. On appelle :

- E le point du segment [AB] tel que $BE = \frac{3}{4}AB$;
- F le point d'intersection de la droite (AD) avec la parallèle à (BD) passant par E ;
- G le point du segment [CD] tel que $DG = \frac{3}{4}DC$;

On cherche à déterminer la position du point H tel que EFGH soit un parallélogramme.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure

2. Où se situe le point H', intersection de la parallèle à (AC) passant par E avec (BC) ?

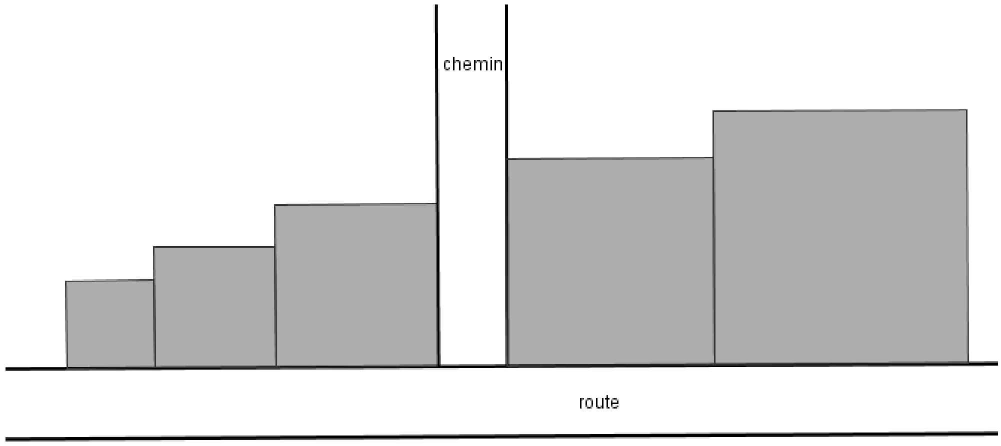
> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture

3. Où se situe le point H'', intersection de la parallèle à (BD) passant par G avec (BC) ?

4. Conclure.

Héritage

Deux frères ont hérité de cinq terrains carrés dont les côtés ont pour longueurs cinq nombres entiers consécutifs.
Les terrains sont disposés le long d'une route en deux groupes : les trois plus « petits » d'un côté d'un chemin et les deux plus « grands » de l'autre côté du chemin comme sur la figure ci-dessous.



Le but de l'exercice est de déterminer les dimensions des terrains telles que les aires de part et d'autre du chemin soient égales.

1. On note n la longueur du côté du troisième carré. En utilisant un tableur, calculer les longueurs des côtés des terrains et leurs aires pour n variant de 3 à 20.

> Appeler l'examinateur pour une vérification des résultats obtenus

2. Pour chaque valeur de n, calculer, à l'aide du tableur, les aires qu'on veut rendre égales et faire une conjecture.

> Appeler l'examinateur pour une vérification des résultats obtenus et de la conjecture

3. *a*. Exprimer, en fonction de n, les aires des terrains de part et d'autre du chemin.
   b. En déduire une équation que n doit vérifier pour que la condition d'égalité d'aires souhaitée soit réalisée.
   c. Résoudre cette équation et vérifier la conjecture émise au 2.

Quel est ce quadrilatère ?

On considère un point O du plan et un nombre positif R. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon R. On considère des points A, B, C et D du cercle $\mathcal{C}$, tels que (BC) et (AD) soient sécantes en un point F et que (CD) et (BA) soient sécantes en un point G.

La bissectrice de $\widehat{CFD}$ coupe (CD) en H et (BA) en I. La bissectrice de $\widehat{DGA}$ coupe (DA) en K et (CB) en J.

1. Faire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie. Faire apparaître les côtés du quadrilatère IJHK.

Appeler l'examinateur et lui montrer la figure.

2. Quelle semble être la nature du quadrilatère IJHK ?
3. Faire afficher par le logiciel les mesures des angles $\widehat{GHI}$, $\widehat{GIH}$ et $\widehat{FIB}$, puis celles des angles $\widehat{FBI}$ et $\widehat{FDH}$. À l'aide de ces informations, établir le plan d'une démonstration prouvant que le triangle IGH est isocèle.

Appeler l'examinateur pour vérification

4. En déduire que IJHK est un losange.

Échange médiane contre hauteur

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R et une corde [AB] de ce cercle.
Par un point I de [AB], on mène la perpendiculaire à la droite (AB) qui coupe le cercle $\mathcal{C}$ en C et D. Soit J le milieu de [BD]. Soit H le point d'intersection des droites (IJ) et (AC).

1. Faire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.

Appeler l'examinateur et lui montrer la figure

2. Afficher la mesure de l'angle $\widehat{IHC}$ fournie par le logiciel. Quelle semble être la nature du triangle IHC ?

3. Comparer les angles $\widehat{CIH}$ et $\widehat{BDI}$, puis les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{DCA}$.

Appeler l'examinateur pour vérification

4. Conclure

Arcs et distances

Soit ABC un triangle équilatéral et soit $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit.
On considère un point P situé sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas le point C.
Soit M le point de la demi-droite [BP) situé à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$ et tel que PM = PA.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure

2. Faire afficher la distance CP, la somme AP + BP ainsi que les mesures des angles $\widehat{APC}$, $\widehat{CPB}$ et $\widehat{APM}$. Faire varier le point P et émettre une conjecture.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture

3.
   a. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{APC}$, celle de l'angle $\widehat{CPB}$ et celle de l'angle $\widehat{APM}$.
   b. En déduire la nature du triangle APM.
   c. En considérant une rotation de centre A et d'angle de mesure 60°, montrer que BM = PC.
   d. Vérifier la conjecture émise au 2.

Triangle orthique

On considère un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. Les hauteurs issues de A, B et C coupent respectivement les côtés (BC), (CA) et (AB) en A', B' et C'. Le triangle $A'B'C'$ est appelé triangle orthique du triangle ABC. On note H l'orthocentre du triangle ABC.

1. Faire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie. Afficher les mesures fournies par le logiciel pour les angles $\widehat{BAA'}$ et $\widehat{C'CB}$. Interpréter le résultat obtenu.

Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle

2. Afficher les mesures fournies par le logiciel pour les angles $\widehat{C'B'B}$ et $\widehat{C'CB}$. Interpréter le résultat obtenu.

Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle

3. Que représente le point H pour le triangle A'B'C' ?

4. Comment modifier ces résultats lorsque l'un des angles du triangle ABC est obtus ?

Triangle particulier

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de diamètre [MN]. Soit A et B deux points de $\mathcal{C}$ et I le milieu de [AB].

La perpendiculaire à la droite (MN) passant par A coupe (MN) en R.

La perpendiculaire à la droite (MN) passant par B coupe (MN) en P.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure

2. Tracer le triangle RIP et faire une conjecture sur la nature de ce triangle.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture

3. On considère la perpendiculaire (d) à la droite (MN) passant par I. Elle coupe le segment [AP] en J et le segment [RP] en K.

   a. Montrer que (d) est la médiatrice du segment [RP].

   b. Vérifier la conjecture faite au 2.