Etude de deux suites récurrentes (sujet 79)

On considère deux suites numériques (X_n) et (Y_n) définies par leurs premiers termes X_0 =-4, Y_0 =3 et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n + 4y_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}(3x_n + 2y_n) \end{cases}$$

1)

- a) En utilisant un tableur (ou une calculatrice), calculer les 30 premiers termes de ces deux suites ainsi que les termes de la suite (W_n) définie par : $w_n = 3x_n + 4y_n$
- b) Quelle particularité présentent les termes de la suite (W_n) ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction faite.

- 2) Essayons de déterminer les expressions de x_n et y_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
 - a) Calculer les 30 premiers termes des rapports $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ et $\frac{y_{n+1}}{y_n}$
 - b) Conjecturer les expressions de x_n et y_n en fonction de n

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

c) Démontrer cette conjecture.

Production demandée.

- Les différents résultats de calcul...
- La stratégie de démonstration retenue à la question 2 ainsi que les étapes de cette démonstration.