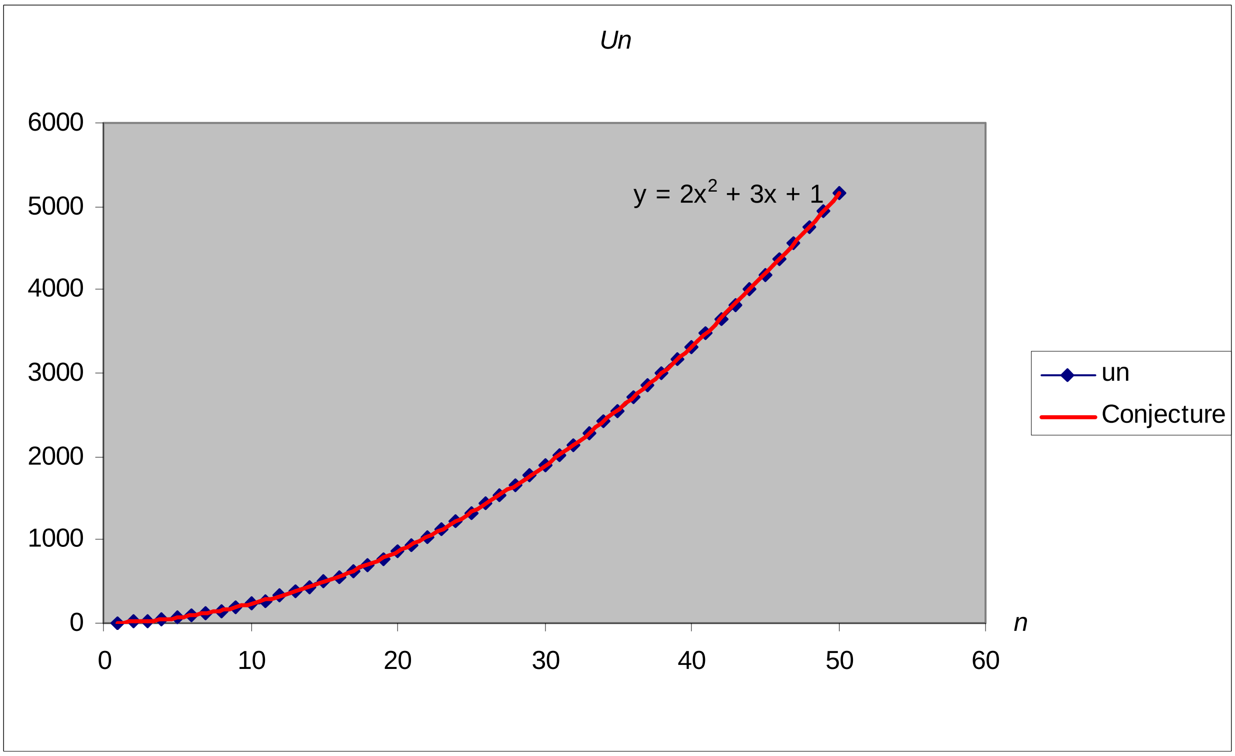
CORRECTION DU SUJET 44 DE L'EXPÉRIMENTATION 2008	
Terminale S	***Séance informatique***

1)

n	somme des n^2	u_n	$2n^2+3n+1$
1	1	6	6
2	5	15	15
3	14	28	28
4	30	45	45
5	55	66	66
6	91	91	91
7	140	120	120
8	204	153	153
9	285	190	190
10	385	231	231
11	506	276	276
12	650	325	325
13	819	378	378
14	1015	435	435
15	1240	496	496
16	1496	561	561
17	1785	630	630
18	2109	703	703
19	2470	780	780
20	2870	861	861
21	3311	946	946



2) **Il semble que la fonction *f* soit un polynôme du second degré**.

Supposons que $f(n) = an^2 + bn + c$. Comme $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$ et $f(3) = u_3$, on est amené à résoudre le système $\begin{cases} a+b+c=6 \\ 4a+2b+c=15 \\ 9a+3b+c=28 \end{cases}$. D'où :

$$\begin{cases} a+b+c=6 & (1) \\ 4a+2b+c=15 & (2) \\ 9a+3b+c=28 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 & (1) \\ 3a+b=9 & (2') \leftarrow (2)-(1) \\ 8a+2b=22 & (3') \leftarrow (3)-(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 & (1) \\ -6a-2b=-18 & (2'') \leftarrow -2\times(2') \\ 8a+2b=22 & (3') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 & (1) \\ 2a=4 & (2''') \leftarrow (2'')+(3') \\ 4a+b=11 & (3'') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=6-2-3=1 \\ a=2 \\ b=11-4\times 2=3 \end{cases}$$

Par suite, **il semble que $f(n) = 2n^2 + 3n + 1$, pour tout entier naturel *n* compris entre 1 et 50**.

3) a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $u_n = 2n^2 + 3n + 1$ »

→ *Initialisation* : comme $2\times 1^2 + 3\times 1 + 1 = 6 = u_1$, alors on a $\mathscr{P}(1)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : $u_n = 2n^2 + 3n + 1$.

D'où : $u_{n+1} = \dfrac{6}{n+1}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n+1)^2\right) = \dfrac{6}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \dfrac{6}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2\right)$.

Or $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{nu_n}{6}$; alors, $u_{n+1} = \dfrac{6}{n+1}\left(\dfrac{nu_n}{6} + (n+1)^2\right) = \dfrac{n}{n+1}\times\left(2n^2 + 3n + 1\right) + 6(n+1)$.

Cherchons à factoriser $2n^2 + 3n + 1$. On remarque que -1 est une racine évidente, alors $2n^2 + 3n + 1 = (n+1)(un+v)$. En développant et en identifiant, on obtient que $2n^2 + 3n + 1 = (n+1)(2n+1)$. Par conséquent,

$u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\times(n+1)(2n+1) + 6(n+1) = n(2n+1) + 6n + 6 = 2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$.

Or $(n+2)(2n+3) = ((n+1)+1)(2(n+1)+1)$. On en déduit que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

→ Conclusion : on a alors prouvé :

$\mathscr{P}(1)$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathscr{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $f(n) = 2n^2 + 3n + 1 = (n+1)(2n+1)$**.

b) Comme $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{nu_n}{6}$, alors $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.