LOIS À DENSITÉ

Objectifs :
- *Déterminer si une fonction est une densité de probabilité.*
- *Calculer des probabilités.*
- *Calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité.*

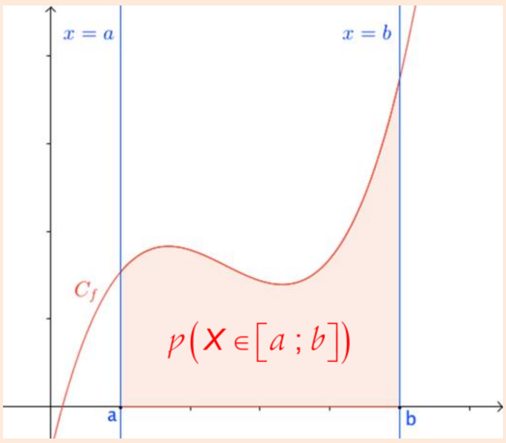
1. Variables aléatoires à densité

Lorsque l'on s'intéresse à la durée d'une communication téléphonique, à la durée de vie d'un composant électronique ou à la température de l'eau d'un lac, la variable aléatoire X associée au temps ou à la température, peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle donné. On dit alors que cette variable X est continue (qui s'oppose à discrète comme c'est le cas par exemple dans la loi binomiale).
On ne peut plus parler de probabilité d'événements car les événements élémentaires sont en nombre infini. La probabilité d'une valeur isolée de X est alors nulle.
On contourne cette difficulté en associant à la variable X un intervalle de $\mathbb{R}$ et en définissant une densité de probabilité.

Définition 1. ***Densité de probabilité***

On appelle densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X, toute fonction f continue et positive sur un intervalle I de R telle que que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.

Soit $[a\ ;\ b]$ un intervalle inclus dans I. $p(X \in [a\ ;\ b]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.



Remarques : • Comme la fonction f est continue et positive, la probabilité $p(X \in \mathrm{I})$ correspond à l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$. Elle vaut alors 1 u.a.

• La probabilité $p(X \in [a\ ;\ b])$ correspond à l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

• Comme la probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle, que l'intervalle J soit ouvert ou fermé importe peu. D'où : $p(X \in [a\ ;\ b]) = p(X \in]a\ ;\ b[) = p(X \in]a\ ;\ b]) = p(X \in [a\ ;\ b[)$.

Définition 2. ***Espérance mathématique d'une variable aléatoire continue***

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X, de densité f sur $[a\ ;\ b]$, est $E(X) = \int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice ❶

Une entreprise produit des dalles en plâtre suivant une variable aléatoire continue X, en tonnes, qui prend ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 20] avec une densité de probabilité f définie par : $f(x) = 0{,}015x - 0{,}00075x^2$

a) Démontrer que f est une densité de probabilité sur $[0\ ;\ 20]$.

b) Calculer la probabilité de l'événement E "La production quotidienne est supérieure ou égale à 12 tonnes".

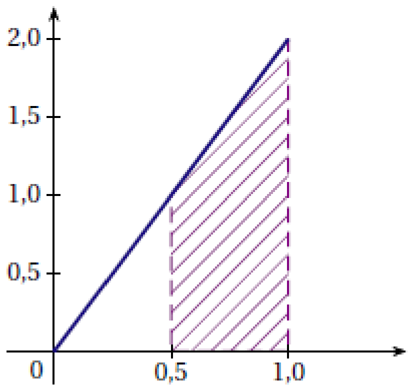
c) Calculer l'espérance mathématique de X.

correction en vidéo

Exercice ❷

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 2x$.

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité dont la fonction de densité est f. Cette fonction de densité est représentée ci-dessous.



1) a) Quelle est la valeur, en unité d'aire, de la surface hachurée ? Préciser la démarche utilisée.

b) Interpréter ce résultat en terme de probabilité.

2) Calculer la probabilité $p(X \in [0\ ;\ 0{,}75])$.

3) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Exercice ❸

1) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I=\int_0^2 \frac{e^{0,5x}}{2}\,\mathrm{d}x$.

2) En déduire que la fonction f définie sur $[0\,;\,2]$ par $f(x)=\frac{e^{0,5x}}{2e-2}$ est une fonction de densité sur $[0\,;\,2]$.

3) Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f. La probabilité $p(X\geq 1,2)$ est-elle supérieure à 0,5 ?

2. Loi uniforme

Définition 3. ***Loi uniforme sur [a ; b]***

Soient a et b deux réels tels que $a<b$.
La loi uniforme sur $[a\,;\,b]$, notée $\mathcal{U}([a\,;\,b])$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur $[a\,;\,b]$ par $f(x)=\frac{1}{b-a}$.

Propriété 1.

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$, alors, pour tout intervalle $[c\,;\,d]$ inclus dans $[a\,;\,b]$, $p(X\in[c\,;\,d])=\frac{d-c}{b-a}$.

Démonstration : $p(X\in[c\,;\,d])=\int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t}{b-a}\right]_c^d=\frac{d-c}{b-a}$.

Exemple : *On choisit un réel au hasard entre 0 et 1.*
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{6}$?

Choisir un réel au hasard entre 0 et 1, c'est le choisir suivant la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$.

$P\left(\left[\frac{1}{8}\,;\,\frac{1}{6}\right]\right)=\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{6}} 1\,\mathrm{d}x=[x]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$.

Exercice ❹

Pierre a pris rendez-vous dans une fabrique de jus de pomme artisanale. Il arrive au hasard entre 8 heures et 9 heures 30 minutes.
Son heure d'arrivée est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[8\,;\,9,5]$.
Déterminer la probabilité que Pierre arrive entre 8h30 et 8h45.

Exercice ❺

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après-vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5\,;\,9,5]$.

1) Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes ?
2) Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?
3) Quel est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique ?

Propriété 2. ***Espérance mathématique d'une v.a. qui suit une loi uniforme***

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$, alors $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$.

Démonstration : $E(X)=\int_a^b \frac{t}{b-a}\mathrm{d}t=\frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$.

Exemple : Dans l'exemple précédent, l'espérance mathématique est égale à $\frac{1}{2}$, ce qui n'a rien de surprenant.

3. Loi exponentielle

Définition 4. ***Loi exponentielle***

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda>0$, lorsque sa densité est la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

Remarques : • $p(X\in[a\ ;\ b])=\int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\left[-e^{-\lambda t}\right]_a^b=-e^{-\lambda b}+e^{-\lambda a}=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$

• Soit t un réel positif, $p(X\le t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^t=-e^{-\lambda t}+e^0=1-e^{-\lambda t}$.
Par suite, $p(X>t)=1-p(X\le t)=1-1+e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}$.

Exemple : X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.
$p(1\le X\le 3)=p(X\le 3)-p(X<1)=1-e^{-0,1\times 3}-\left(1-e^{-0,1\times 1}\right)=e^{-0,1}-e^{-0,3}\approx 0,164$

Propriété 3. ***Espérance mathématique d'une v.a. qui suit une loi exponentielle***

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Alors $E(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\lambda}$.

Exemple : Soit une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,04$.
On obtient : $E(X)=\dfrac{1}{0,04}=25$.

Exercice ❻

On admet que la durée d’attente, en minutes, dans une file d’attente est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Sachant que le temps moyen d’attente est de 20 minutes, calculer la probabilité d’attendre :

a) moins de 15 minutes ;
b) plus de 30 minutes.

[correction en vidéo]

Exercice ❼

Une entreprise dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc…
Un autocar part de son entrepôt. On note *D* la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l’autocar va parcourir jusqu’à ce qu’il survienne un incident. On admet que *D* suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.
Dans tout l’exercice les résultats numériques seront arrondis au millième.
Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

a) comprise entre 50 et 100 km ;
b) supérieure à 300 km.

Propriété 4. ***Loi de durée de vie sans vieillissement***

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Alors, pour tout réel t et h positifs, on a : $p_{X\geq t}\left(X \geq t+h\right) = p\left(X \geq h\right)$.

Signification : si par exemple X désigne la durée de vie, exprimée en années, d’un composant électronique, la probabilité qu’il fonctionne encore t années sachant qu’il a déjà fonctionné pendant h années est la même qu’il fonctionne pendant au moins t années après sa mise en service. On dit que la durée de vie d’un appareil est dite «sans vieillissement».

Démonstration : $p_{X\geq t}\left(X \geq t+h\right) = \dfrac{p\left(\left(X \geq t+h\right) \cap \left(X \geq t\right)\right)}{p\left(X \geq t\right)} = \dfrac{p\left(X \geq t+h\right)}{p\left(X \geq t\right)}$

Donc $p_{X\geq t}\left(X \geq t+h\right) = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = p\left(X \geq h\right)$.

Exercice ❽

La durée de vie, exprimée en heures, d'un petit composant électronique d'une carte d'anniversaire musicale est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0035$.
Sachant qu'un composant testé a fonctionné plus de 200 heures, calculer la probabilité qu'il tombe en panne avant 300 heures.

[correction en vidéo]

Exercice ❾

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée *X* qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1) Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.
On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?
4) On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
5) Combien l'établissement devait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Exercice ❿

À un standard téléphonique, on entend « votre temps d'attente est estimé à 5 minutes ».
Ce temps d'attente, en minutes, noté T, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle, et l'estimation annoncée correspond à l'espérance de T.
Vous avez déjà attendu plus d'une minute. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 minutes au total ?