

CALCUL INTÉGRAL

Objectifs :

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer l'aire sous une courbe ou entre deux courbes.

1. Notion d'intégrale

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a ; b]$.

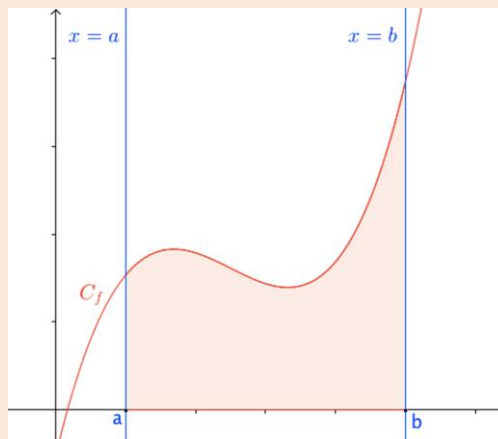
Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Définitions 1. Aire sous une courbe et intégrale de f sur un intervalle

On appelle :

- **Unité d'aire (u.a.)** : l'aire du rectangle bâti à partir des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- **Domaine sous la courbe** : domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ ($a \neq b$).

Ce domaine est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.



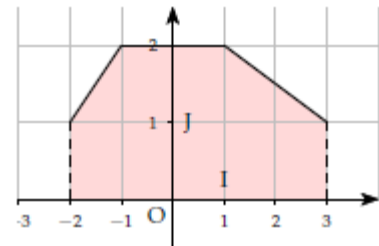
- **Intégrale de f sur $[a ; b]$** : la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$. On la note : $\int_a^b f(x) dx$, qui se lit « intégrale de a à b de f ». a et b sont appelés les bornes de l'intégrale.



Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Le symbole $\int$ est un S stylisé (initiale de somme) afin de rappeler que l'intégrale peut être obtenue comme limite d'une somme d'aires de rectangles. Ce symbole a été introduit par Leibniz au XVII^e siècle, mais la notation $\int_a^b$ a été introduite par le français *Joseph Fourier* (1768 ; 1830). Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Exemple : On donne la représentation ci-contre d'une fonction f sur $[-2 ; 3]$, ainsi que les mesures : $OI = 2$ cm et $OJ = 3$ cm.

Calculer $\int_{-2}^3 f(x) dx$, puis en déduire l'aire en cm^2 de la partie grisée.



Une unité d'aire correspond à un rectangle. Or il y en a 7 « entiers », une moitié de rectangle et deux morceaux (à droite) qui forment un rectangle « entier ».

Par conséquent, $\int_{-2}^3 f(x) dx = 8,5$.

Or $1 \text{ u.a.} = 2 \times 3 = 6 \text{ cm}^2$ et $8,5 \times 6 = 51$, donc l'aire de la surface grisée est égale à 51 cm^2 .

Remarques : • $f(x) dx$ est l'aire d'un rectangle de dimensions $f(x)$ et dx .

• La variable x est dite muette et peut être remplacée par n'importe quelle lettre :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

Exercice ❶

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.

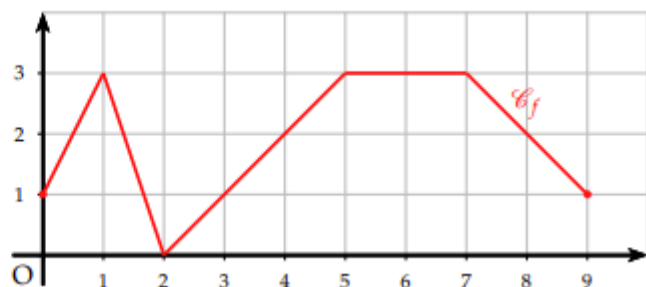
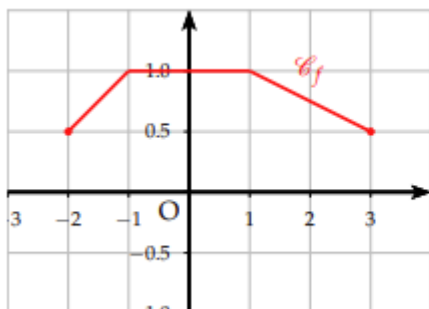
b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$.



[correction en vidéo](#)

Exercice ❷

Pour chaque fonction affine définie par morceaux f , représentée ci-dessous, calculer, en utilisant les aires, l'intégrale I de f sur l'intervalle de définition de f .



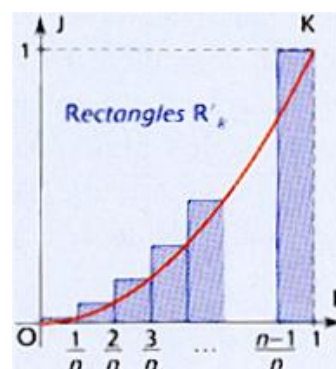
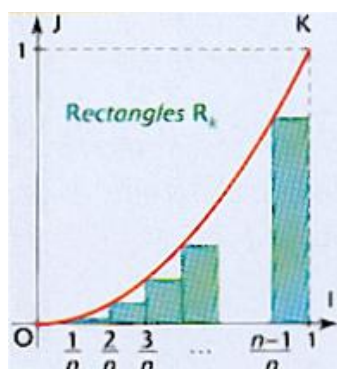
2. Méthode des rectangles

Calculer l'intégrale de la fonction carrée sur $[0 ; 1]$.

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ est la courbe qui représente la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^2$. $\mathcal{D}$ est le domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$.

On choisit de prendre l'aire du carré OIKJ pour unité d'aire et on se propose de déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$. Pour cela :

- on subdivise l'intervalle $[0 ; 1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$;
- sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$ (avec $0 \leq k \leq n-1$), on construit le rectangle R_k de hauteur $\left(\frac{k}{n}\right)^2$ et le rectangle R'_k de hauteur $\left(\frac{k+1}{n}\right)^2$.



On note u_n la somme des aires des rectangles R_k et v_n la somme des aires des rectangles R'_k . On peut démontrer que : $u_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ et $v_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = u_n + \frac{1}{n}$.

On en déduit que : $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$.

$$u_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^2}.$$

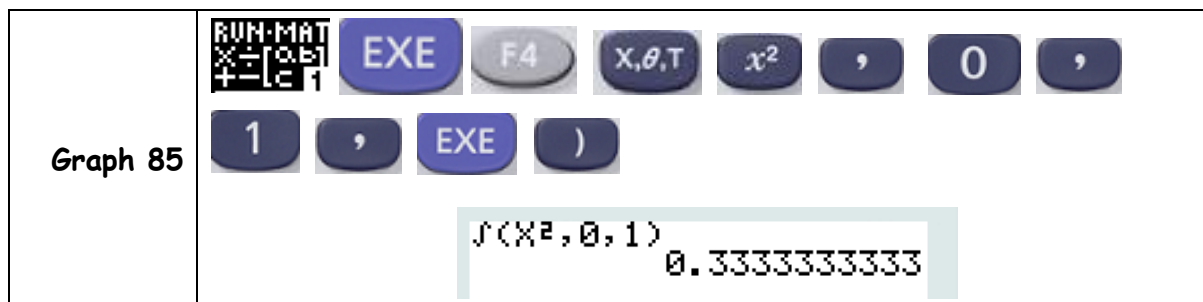
Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}$ (par produit et somme de limites).

Comme $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$, et par

$$\text{suite, } \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Utilisation de la calculatrice

TI 83	tests A		précéd résol	catalog		L1 Y
	math		entrer	0		1
		échanger x, t, θ, n	$\sqrt{\quad}$		échanger x, t, θ, n	précéd résol
			x^2			entrer
	$\int_0^1 (x^2) dx$ $.3333333333$					



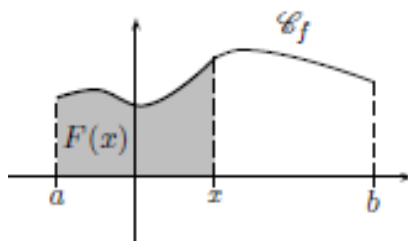
3. Fonction définie par une intégrale

Théorème. Existence d'une primitive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

La fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a ; b]$ et sa dérivée est la fonction f .

La fonction F est donc une primitive de f : c'est LA primitive de f sur $[a ; b]$ qui s'annule en a .



Démonstration dans le cas où f est positive et croissante : Soit $x_0 \in [a ; b]$ et h un réel non nul tel que $(x_0 + h) \in [a ; b]$.

• Si $h > 0$: Par définition, $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt$.

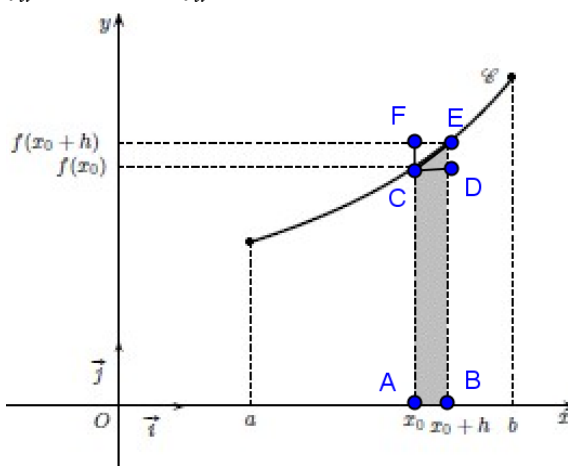
Par suite, $F(x_0 + h) - F(x_0)$ est l'aire de la partie grisée ci-contre.

Comme f est croissante, cette aire est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABCD.

Or l'aire du rectangle ABCD est égale à $h \times f(x_0)$, et celle du rectangle ABFE est égale à $h \times f(x_0 + h)$.

On en déduit alors que :

$$h \times f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$



Comme $h > 0$, on obtient : $f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$.

Or f est continue sur $[a ; b]$, donc en x_0 , alors $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

• Si $h < 0$: par un raisonnement analogue, on obtient :

$$-h \times f(x_0 + h) \leq F(x_0) - F(x_0 + h) \leq -h \times f(x_0).$$

Comme $-h > 0$, alors $f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0) - F(x_0 + h)}{-h} \leq f(x_0)$, ou encore

$$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0). \text{ Par conséquent, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

• Finalement, f est dérivable pour tout x_0 de $[a; b]$, et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Exercice ③

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

- 1) Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer le tableau de variations de g .

4. Calculs d'intégrales

Propriété 1. Lien entre intégrale et primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I .

Si F est une primitive quelconque de f sur I , $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration : La dérivée de la fonction G définie sur $[a; b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la fonction f . Donc G est une primitive de f sur $[a; b]$.

Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a; b]$, on a $G(x) = F(x) + C$, où C est une constante réelle.

De plus, $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ et $G(a) = F(a) + C$, donc $F(a) = -C$ et par suite, $C = -F(a)$.

On en déduit que $G(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + C = F(b) - F(a)$.

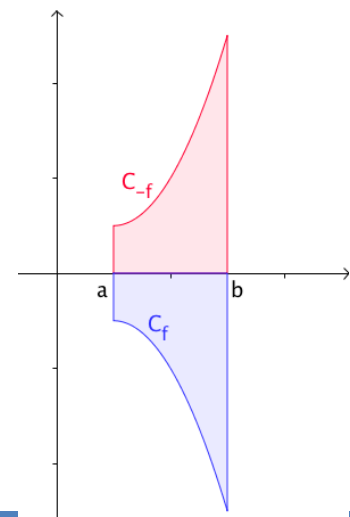
Remarque : La définition est étendue à des fonctions de signe quelconque.

Ainsi pour une fonction f négative sur $[a; b]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= F(b) - F(a) = -G(b) + G(a) \\ &= -(G(b) - G(a)) \\ &= -\int_a^b (-f)(t) dt \end{aligned}$$

où G est une primitive de la fonction $-f$.

Dans ce cas, l'intégrale de la fonction f sur $[a; b]$ est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f sur $[a; b]$.



Exercice 4

Calculer, à l'aide des primitives, les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 \frac{3}{x^2} dx$; b) $\int_0^1 (3x^2 - 5x + 1) dx$; c) $\int_{-1}^1 e^{-2x} dx$



Corrigés en vidéos : [a\)](#) ; [b\)](#) et [c\)](#)

Exercice 5

Calculer les suivantes à l'aide d'une primitive :

a) $\int_0^4 (x-3) dx$; b) $\int_1^2 \left(x^2 + x - \frac{1}{x} \right) dx$; c) $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} 5e^{3x} dx$;
d) $\int_1^2 \frac{1}{3x-2} dx$; e) $\int_{-1}^2 (t^2 - 4t + 3) dt$; f) $\int_0^1 x e^{x^2-1} dx$

Propriétés 2.

Soit f une fonction continue sur I , et, a , b et c trois réels de I .

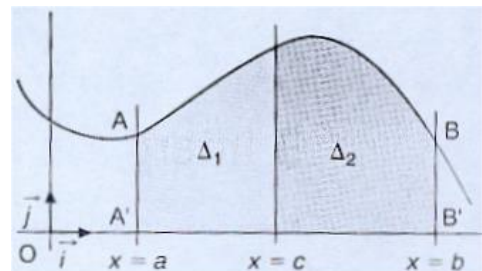
$$\int_a^a f(x) dx = 0 ; \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx \text{ et } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

relation de Chasles

Démonstration de la relation de Chasles :

Soit F une primitive de f sur I .

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$



5. Calculs d'aires à l'aide des intégrales

Propriétés 3 (admisses). Inégalités et intégration

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et a et b deux réels de I , avec $a \leq b$.

Si f est positive sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Si $f \leq g$ sur I , alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Démonstrations : • Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive. Par suite, $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

• Si $f(x) \leq g(x)$ alors $g(x) - f(x) \geq 0$.

Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$.

D'après les propriétés 6 et 7, on obtient $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Par conséquent, $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$.

Exercice 6

a) Démontrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.



[correction en vidéo](#)

Exercice 7

Démontrer que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \leq 1$.

Propriété 4. Aire entre deux courbes

Si $f \geq g$ sur I , alors l'aire comprise entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ u.a.

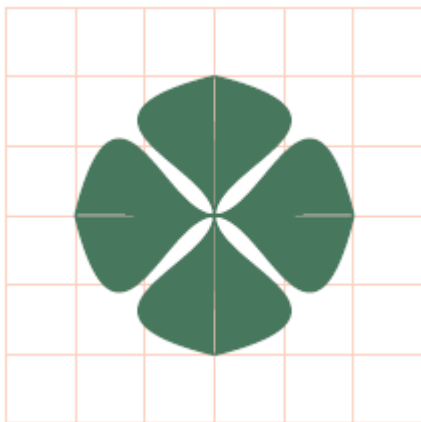
Exercice 8

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.



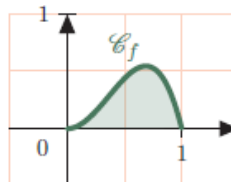
[correction en vidéo](#)

Exercice 9



Le trèfle à quatre feuilles ci-contre a été obtenu à partir de la courbe de la fonction f (définie ci-dessous) par un jeu de symétries et de rotations.

La fonction f , représentée ci-dessous, est définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 3x^2$.



Montrer que son aire est égale à 2,4 u.a.

6. Valeur moyenne d'une fonction

Définition 2. Valeur moyenne d'une fonction

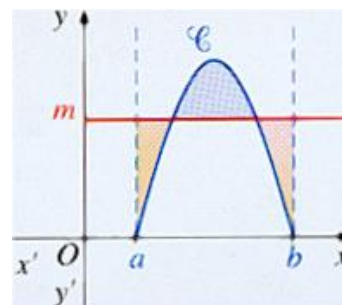
Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$.

La valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ est le nombre réel : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Si $f(x) > 0$, on s'intéresse au rectangle de largeur $b-a$ dont l'aire est égale à l'aire de la surface hachurée : c'est la longueur m de ce rectangle que l'on appelle « valeur moyenne de f » sur $[a ; b]$.

Si f est une fonction constante sur $[a ; b]$, sa valeur moyenne sur $[a ; b]$ est égale à cette constante.

En fin de compte, la technique est de remplacer f par une fonction constante de même intégrale sur le même intervalle.



Exercice 10

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie. Au 10^{ème} jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.

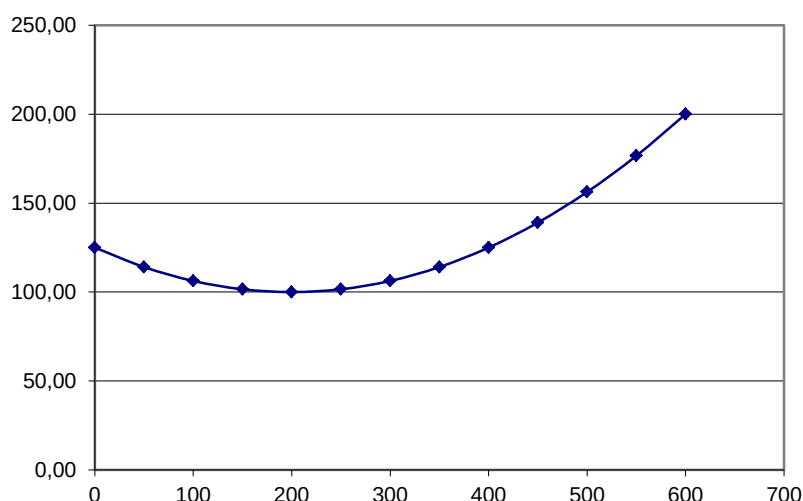
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.



[correction en vidéo](#)

Exercice 11

On voudrait niveler le terrain décrit ci-dessous. À quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent les déblais ?



$$h(d) = \frac{d^2}{1600} - \frac{d}{4} + 125$$

Déterminer une primitive de la fonction h , puis calculer la valeur moyenne μ de h sur l'intervalle $[0 ; 600]$. Démontrer ainsi le résultat conjecturé lors de la première partie de ce problème.

Exercice 12

On injecte dans le sang un médicament.

On note t le temps (en heures) écoulé depuis l'injection du produit.

La concentration C du médicament (en grammes par litre de sang) en fonction de t est donnée sur $[0 ; +\infty[$ par $C(t) = 5te^{-t}$.

- 1) Montrer qu'une primitive de C sur $[0 ; +\infty[$ est définie par $F(t) = 5(-t-1)e^{-t}$.
- 2) En déduire la concentration moyenne pendant la première heure après injection.

Exercice 13

Soit la valeur moyenne $\mu = 2$ d'une fonction f sur $[1 ; 4]$. Calculer $\int_1^4 f(x)dx$.